

BEMERKUNGEN ZUR DYNAMISCHEN STATISTISCHEN  
KONZENTRATIONSANALYSE

Wilfried Studeny

1973



Bemerkungen zur dynamischen  
statistischen Konzentrationsanalyse

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung der Doktorwürde  
einer Hohen Staatswirtschaftlichen Fakultät  
der Ludwig-Maximilians-Universität  
zu München

vorgelegt von

Wilfried Studeny

1973



Referent: Prof.Dr. H. Kellerer

Korreferent: Prof.Dr. O. Anderson

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Februar 1973



| <u>Inhaltsverzeichnis</u>                                                                  | Seite |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1. Ein Überblick zur Problematik des Konzentrationsbegriffs                                | 3     |
| 1.1 Statischer und dynamischer Aspekt des Konzentrationsbegriffs                           | 8     |
| 1.2 Absolute und relative Konzentration                                                    | 16    |
| 1.3 Bedeutung des dynamischen Aspekts in der Konzentrationsmessung                         | 23    |
| 2. Verfahren zur komparativ-statistischen Konzentrationsmessung                            | 32    |
| 2.1 Die Veränderung der absoluten Konzentration und Verfahren zu ihrer Messung             | 33    |
| 2.1.1 Vergleich von statischen Konzentrationsmaßen für zwei Zeitpunkte $t_i$ und $t_{i+1}$ | 33    |
| 2.1.2 Grossack's Konzentrationskoeffizient zur Messung von Konzentrationsprozessen         | 41    |
| 2.1.3 Die Analyse von Konzentrationsprozessen nach Hart und Prais                          | 57    |
| 2.2 Die Veränderung der relativen Konzentration und Verfahren zu ihrer Messung             | 75    |
| 2.3 Kritische Würdigung                                                                    | 80    |
| 3. Ein Ansatz zur dynamischen Konzentrationsmessung mit Hilfe von Quadratsummen            | 83    |
| 3.1 Matrixdarstellung des Konzentrationsprozesses und Quadratsummen                        | 83    |

|                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2 Die Bestimmung der Extrema der Quadratsummen $q_1$ , $q_2$ und $q$                                       | 93  |
| 3.2.1 Minimum von $q_1$ , $q_2$ und $q$                                                                      | 93  |
| 3.2.2 Maxima von $q$ , $q_1$ und $q_2$                                                                       | 98  |
| 3.3 Die besondere Bedeutung der Quadratsummen $q$ , $q_1$ und $q_2$ bei dynamischer Konzentrationsmessung    | 113 |
| 3.4 Die Beurteilung von Konzentrationsprozessen mit Hilfe von $q$ , $q_1$ und $q_2$                          | 116 |
| 4. Distanzen als Grundlage dynamischer Konzentrationsmessung                                                 | 129 |
| 4.1 Zur Bedeutung der Entfernung vom "Nichtkonzentrationspunkt"                                              | 129 |
| 4.2 Die Zerlegung der Bewegung des Konzentrationspunktes in Rotations- und Radialbewegung                    | 138 |
| 4.3 Möglichkeiten zur Einbeziehung von $n$ als zeitlich variabler Größe sowie Erfassung des Parameters $n_0$ | 149 |
| 4.4 Zusammenfassung: der Gedanke der Gültigkeitsbereiche                                                     | 153 |
| 5. Ansätze zu einem Erklärungsmodell für Konzentrationsprozesse                                              | 157 |
| 5.1 Die Erfassung des Verhaltens der Merkmalsträger                                                          | 159 |

|                                                                                                                                 | Seite |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 5.2 Die Funktion $\varphi(t)$ im zwei- und dreidimensionalen Fall                                                               | 167   |
| 5.2.1 Die Funktion $\varphi(t)$ für zwei Merkmalsträger                                                                         | 168   |
| 5.2.2 Die Funktion $\varphi(t)$ für drei Merkmalsträger                                                                         | 172   |
| 5.3 Verallgemeinerung auf n Dimensionen                                                                                         | 173   |
| 5.4 Interpretation der in 5.2 und 5.3 gewonnenen Bewegungsgleichungen                                                           | 175   |
| 5.4.1 Allgemeines                                                                                                               | 175   |
| 5.4.2 Abgrenzung des Zeitintervalls für den dreidimensionalen Fall                                                              | 177   |
| 5.4.3 Reduzierung der Merkmals-träger nach der Zeit $t_e$                                                                       | 178   |
| 5.5 Ein Versuch zur mathematischen Erfassung von weiteren Einflüssen auf die Bewegung des Konzentrationspunktes                 | 180   |
| 5.6 Anwendungsmöglichkeiten des hier entwickelten Verfahrens zur Bestimmung von $\varphi(t)$ bei realen Konzentrationsprozessen | 185   |
| Literaturverzeichnis                                                                                                            | 188   |



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

## 1. Ein Überblick zur Problematik des Konzentrationsbegriffs

Die Notwendigkeit, sich mit wirtschaftlicher Konzentration zu beschäftigen und der Versuch, Konzentrationserscheinungen quantitativ darzustellen, resultieren daraus, daß "starke Konzentrationen vielfach wirtschaftliche und soziale Probleme besonderer Art aufwerfen."<sup>1)</sup> Dabei verfolgt man mit der quantitativen Erfassung letztlich das Ziel, Konzentrationserscheinungen des realen Wirtschaftslebens zu beurteilen und zu bewerten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der quantitativen Erfassung und Analyse von wirtschaftlichen Konzentrationsvorgängen. Im Mittelpunkt des Interesses steht dabei der Ablauf eines Prozesses und die Beschreibung dieses Ablaufs. Dazu seien zunächst einige generelle Überlegungen angestellt.

Im allgemeinen wird ein Prozeß, insbesondere auch ein wirtschaftlicher Konzentrationsprozeß zunächst als ein Nacheinander von Zuständen empfunden, zumal die Betrachtung meist für gewisse Zeiträume zu bestimmten Zeitpunkten erfolgt (z.B. monatlich am Monatsende oder jährlich zu einem bestimmten Stichtag). Es ist daher naheliegend, jeden durchlaufenen Zustand

---

<sup>1)</sup> Kellerer, H., Statistik im modernen Wirtschafts- und Sozialleben, Reinbek bei Hamburg, 1960, S. 60

zuerst einmal für sich zu betrachten und zu analysieren. Damit wird auf eine Zusammenschau verzichtet, der Zusammenhang, der zwischen den Zuständen besteht, bleibt zunächst außer Betracht.

In einem weiteren Schritt muß man dann dem Wesen eines Prozesses entsprechend versuchen, den Konzentrationsprozeß als Ganzes zu charakterisieren. Damit richtet man das Hauptaugenmerk auf den gesamten Bewegungsablauf. Diese Betrachtungsweise verlangt es, alle Zustände insgesamt zu sehen, d.h. aus dem zeitlichen Nacheinander ein gleichzeitiges Vorhandensein zu machen.

Die Erfassung eines Prozesses als Gesamtheit steht aber erst am Anfang bei der Beurteilung eines wirtschaftlichen Konzentrationsprozesses, die letztlich danach verlangt, solche Prozesse zueinander in Beziehung zu setzen. Beides bereitet jedoch wegen der Komplexität realer wirtschaftlicher Konzentrationsprozesse große Schwierigkeiten. Kriterien für die Charakterisierung und vergleichende Ordnung wirtschaftlicher Konzentrationsprozesse werden dann oft subjektiven Bewertungsmaßstäben entsprechend gewählt und sind damit angreifbar, denn der Aussagewert einer Analyse auf Grund derartiger Kriterien ist stets begrenzt.

Dies ist der Grund für Versuche, durch die Entwicklung von Konzentrationsmaßen zu einer objektiveren Betrachtungsweise zu gelangen. Man benutzt dabei

mathematische Hilfsmittel, indem man einer Konzentrationerscheinung aus dem realen Wirtschaftsleben eine Maßzahl zuordnet, die - wertfrei - nach einer bestimmten vorgegebenen Regel berechnet wird. Die Belegung mit Maßzahlen erlaubt dann eine Klassenbildung insofern, als die betrachteten Konzentrationerscheinungen nach bestimmten Gesichtspunkten mit Hilfe der ermittelten Maßzahl klassifiziert werden können, etwa indem man alle Erscheinungen mit der gleichen (bzw. annähernd gleichen) Maßzahl als zur gleichen Klasse gehörig betrachtet. Nur wenn sich die so gebildeten Klassen durch Eigenschaften auszeichnen, denen eine reale wirtschaftliche Bedeutung zukommt, ist die gewählte Zuordnungsvorschrift, nach der einer Konzentrationerscheinung die entsprechende Maßzahl zugeordnet wird, vom wirtschaftswissenschaftlichen Standpunkt auch als sinnvoll anzusehen.

Wie sich im folgenden zeigen wird, ist die Klassifizierung eines Konzentrationsprozesses im Rahmen einer Konzentrationsanalyse noch viel schwieriger als die Klassifizierung von Zuständen wirtschaftlicher Konzentration, nicht zuletzt deshalb, weil die Charakterisierung eines Prozesses durch eine Maßzahl besonders problematisch ist. Zur Verdeutlichung dieser Problematik wird im 1. Kapitel dieser Arbeit ein mathematisches Modell entwickelt, das isomorph zu realen wirtschaftlichen Konzentrationsprozessen ist. Als isomorphe Abbildung erfaßt dieses mathematische Modell zur Beschreibung eines Konzentrationsprozesses in vollem Umfang die Komplexität des realen Prozesses und bildet die Grundlage für die Untersuchung einiger

Möglichkeiten im Rahmen einer Konzentrationsanalyse zu globaleren Größen zur Beurteilung von Konzentrationsprozessen zu gelangen. Das Modell erweist sich besonders deswegen als hilfreich, weil es sich dadurch, daß in ihm geometrische Zusammenhänge ihren Niederschlag gefunden haben, anschaulich deuten läßt. Die Problematik, die mit der Entwicklung insbesondere von dynamischen Konzentrationsmaßen verbunden ist, läßt sich so deutlich aufzeigen.

Im 2. Kapitel werden dann zwei bestehende Ansätze zur dynamischen Konzentrationsmessung besprochen, wobei zur Beurteilung dieser Ansätze auch das im 1. Kapitel entwickelte Instrumentarium verwendet wird.

Das 3. Kapitel ist dann dem Versuch gewidmet, vor dem Hintergrund dieses mathematischen Modells eines Konzentrationsprozesses durch Verdichtung Kenngrößen für den Gesamtprozeß zu entwickeln. Bei Fallunterscheidungen wird der oben erörterte Gedanke der Klassifizierung von Konzentrationsprozessen im Rahmen einer Analyse aufgenommen. Das 4. Kapitel, das auf den Ergebnissen des 3. Kapitels aufbaut, versucht einen Weg zur Umgehung der Nachteile aufzuzeigen, die die Beurteilung von Konzentrationsprozessen mit Hilfe der im 3. Kapitel entwickelten Kenngrößen mit sich bringt.

Die Bewertung eines Konzentrationsprozesses, z.B. mit Hilfe eines Konzentrationsmaßes, ist jedoch nur ein Teil einer Konzentrationsanalyse. Während sich die Kapitel zwei bis vier dieser Arbeit mit dem Problem der quantitativen Erfassung eines Prozesses durch

Globalgrößen befassen, steht im 5. Kapitel die Erörterung der Frage im Vordergrund, warum sich ein wirtschaftlicher Konzentrationsprozeß in einer ganz bestimmten Weise entwickelt hat. Das entsprechende Modell, das im 5. Kapitel entwickelt und diskutiert wird, bietet sich aus dem Modell des ersten Kapitels heraus zur Erklärung von Konzentrationsprozessen an.

Dieser kurze Überblick über Inhalt und Ergebnisse der fünf Kapitel dieser Arbeit sollte einen Hinweis auf die bestehenden Zusammenhänge geben und auf die zentrale Stellung des in den nun folgenden Abschnitten zu entwickelnden Modells aufmerksam machen. Dabei wird auch die Gelegenheit zu Begriffsbestimmungen und grundsätzlichen Erörterungen zum Komplex "wirtschaftliche Konzentration" wahrgenommen.

## 1.1 Statischer und dynamischer Aspekt des Konzentrationsbegriffs

Es seien  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{X}$   $(m,n)$ -Matrizen. Das Element  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) der Matrix  $\mathcal{U}$  gebe die Größe des Merkmalsbetrages des Merkmalsträgers  $j$  zum Zeitpunkt  $t_i$  an<sup>1)</sup>;  $A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  sei der Gesamtmerkmalsbetrag zum Zeitpunkt  $t_i$ .

Die Matrix  $\mathcal{X}$  erhält man aus der Matrix  $\mathcal{U}$ , indem man die Elemente  $a_{ij}$  jeder Zeile  $i$  durch den zugehörigen Gesamtmerkmalsbetrag  $A_i$  (Zeilensumme) dividiert. Das Element  $x_{ij}$  der Matrix  $\mathcal{X}$  gibt damit die Größe des Anteils  $\frac{a_{ij}}{A_i}$  des Merkmalsträgers  $j$  am Gesamtmerkmalsbetrag  $A_i$  zum Zeitpunkt  $t_i$  an; es gilt daher:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ und } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Die Elemente  $a_{ij}$  und  $x_{ij}$  aus  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{X}$  seien die Funktionswerte zu  $n$  zeitabhängigen Funktionen  $a_j = a_j(t)$  und  $x_j = x_j(t)$  für diskrete Zeitpunkte  $t_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Dabei sei für die weiteren Ausführungen  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  für alle  $i = 1, \dots, m-1$  als konstant vorausgesetzt; Die Zeitabschnitte zwischen den  $m$  Beobachtungen der Merkmalsbeträge  $a_{ij}$  seien also gleich lang; damit enthält jede Spalte der Matrizen  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{X}$  eine äquidistante Zeitreihe.

---

<sup>1)</sup>  $a_{ij}$  kann auch die Größe des Merkmalsbetrages eines Merkmalsträgers  $j$  über einen Zeitraum  $i$  angeben (z.B. Jahresumsatz). Auf einen entsprechenden Hinweis wird jedoch im folgenden meist verzichtet.

Eine interessante und für die weiteren Ausführungen zum Konzentrationsphänomen besonders relevante Betrachtungsweise läßt sich von der Matrix  $\mathcal{K}$  ausgehend, folgendermaßen gewinnen: Die Spalten von  $\mathcal{K}$  enthalten Informationen, wie sich der Anteil am Gesamtmerkmalsbetrag eines jeden der insgesamt  $n$  Merkmalsträger im Zeitablauf gestaltet. Entsprechend lassen sich die Zeilen der Matrix  $\mathcal{K}$  als Beobachtungen einer Vektorfunktion

$\mathcal{V}(t) = (x_1(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t))$ , die als Komponenten die oben eingeführten Zeitfunktionen

$x_j = x_j(t)$  enthält, auffassen. Die Betrachtung der Vektorfunktion  $\mathcal{V}(t)$  erweist sich als vorteilhaft, da sie sich in bezug auf das Konzentrationsproblem recht anschaulich interpretieren läßt: jede Zeile der Matrix  $\mathcal{K}$  läßt sich als Vektor auffassen, dessen Komponenten, wie oben erwähnt, den Anteil am Gesamtmerkmalsbetrag zum Zeitpunkt  $t_i$  eines jeden der  $n$  Merkmalsträger darstellen. Ordnet man jedem dieser  $n$  Merkmalsträger in einem  $n$ -dimensionalen Koordinatensystem eine Koordinate zu, so beschreibt eine Zeile von  $\mathcal{K}$ , als Vektor aufgefaßt, die Lage eines Punktes  $P$  im soeben eingeführten Koordinatensystem. Dieser Punkt liegt wegen

der Bedingung  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$  zu jeder Zeit  $t$  auf einer

Hyperebene des  $n$ -dimensionalen Raumes. Die bezüglich einer Zeile der Matrix  $\mathcal{K}$  angestellten Überlegungen haben ihre Gültigkeit in gleicher Weise für alle  $i = 1, \dots, m$  Zeilen. Da die Matrix  $\mathcal{K}$  nichts anderes enthält als die Funktionswerte der Vektorfunktion

$\mathcal{V}(t)$  für diskrete Zeitpunkte  $t_i$ , ist es möglich,  $\mathcal{V}(t)$  als Funktion zu interpretieren, die die Bewegung des Punktes  $P$  im  $\mathbb{R}^n$  auf der Hyperebene

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$  beschreibt. Da die Lage des "Konzentrationspunktes"  $P$  über die Verteilung der Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag auf die  $n$  Merkmalsträger Auskunft gibt, beschreibt  $\mathcal{C}(t)$  also, wie sich diese Anteile für alle  $n$  Merkmalsträger im Zeitablauf verändern. Daraus ergibt sich ihre Bedeutung insbesondere für dynamische Betrachtungen, während sich statische Analysen - zeitpunkt- bzw. periodenorientiert - vor allem mit der Lage des Konzentrationspunktes zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_1$  befassen.

Dem letzteren entsprechend wird es auch allgemein als Aufgabe der statischen Konzentrationsmessung angesehen, in den Matrizen  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{K}$  für eine Zeile  $i$  "das Ausmaß der Ungleichheit in der Verteilung der Objekteinheiten (d.h. der Komponenten des  $i$ -ten Zeilenvektors von  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{K}$ , Anm. des Verf.) auf die Trägereinheiten zu charakterisieren"<sup>1)</sup>. Das Hauptinteresse bei der Konzentrationsmessung im statischen Sinn geht also dahin, möglichst eingehend den Begriff "Ungleichheit der Verteilung" zu erörtern, insbesondere aber die Extreme "vollständige Konzentration" und "vollständige Nichtkonzentration" exakt zu definieren, dabei aber die Realität so zu berücksichtigen, daß sich Konzentrationssituationen aus der Praxis geeignet einordnen lassen und dadurch eine fundierte Beurteilung zu ermöglichen.

---

<sup>1)</sup> Bruckmann, G., Einige Bemerkungen zur statischen Messung der Konzentration, in: *Metrika*, 14 (1969), 2-3, S. 183.

Da die Verteilung von Objekteinheiten, d.h. von Anteilen am Gesamtmerkmalsbetrag, auf Trägereinheiten zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_i$  ihren Niederschlag in einer Zeile der Matrix  $\mathcal{R}$  findet, und, wie oben erörtert, diese Zeile als Vektor interpretiert, einen Punkt im  $\mathcal{R}^n$  bezeichnet, läßt sich das Problem der statischen Konzentrationsmessung letztlich dahingehend formalisieren, daß es gilt, durch ein "Konzentrationsmaß" die Lage des "Konzentrationspunktes"  $P$  auf der Hyperebene, die für jeden Zeitpunkt  $t_i$  durch die Gleichung  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$  repräsentiert wird, zu charakterisieren. Dies geschieht zumeist dadurch, daß der Konzentrationspunkt zu bestimmten anderen, durch ihre Lage besonders ausgezeichneten Punkten auf der Ebene  $\sum x_{ij} = 1$  in Beziehung gesetzt wird. Ohne auf die Problematik hier im Detail einzugehen, sei noch erwähnt, daß die Extremsituationen "vollständige Konzentration" und "vollständige Nichtkonzentration" sich auf der Hyperebene  $\sum x_{ij} = 1$  als Punkte von besonders ausgezeichneter Lage erweisen, die sich als Vergleichsbasis für die statische Konzentrationsmessung anbieten. Dabei ist "vollständige Konzentration" durch einen Einheitsvektor im  $\mathcal{R}^n$  definiert, "vollständige Nichtkonzentration" durch einen Vektor mit  $n$  gleichen Komponenten  $\frac{1}{n}$ .<sup>1)</sup>

Der bisher besprochenen Konzentrationsmessung steht

---

<sup>1)</sup> vgl. dazu die ausführlichere Betrachtung in 1.2

die dynamische Betrachtung eines "Konzentrationsprozesses" gegenüber. Unter Konzentration im dynamischen Sinn, d.h. unter einem Konzentrationsprozeß, versteht man dabei Veränderungen in der o.a. "Ungleichheit der Verteilung von Objekt- auf Trägereinheiten" im Zeitablauf und zwar in Richtung auf die Extremsituation "vollständige Konzentration" (im statischen Sinn) hin.

Als Gegenstück dazu wird der Dekonzentrationsprozeß als eine Entwicklung definiert, die diese Ungleichheit der Verteilung im Zeitablauf mindert. Quantitative Darstellung von dynamischer Konzentration verlangt daher eine Analyse im Zeitbereich: bezüglich der zu Anfang dieses Absatzes eingeführten Matrizen  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{K}$  bedeutet das, daß zur horizontalen, zeitpunktorientierten Betrachtung die vertikale, zeitablauforientierte hinzutritt. Die Bedeutung der Vektorfunktion  $\mathcal{U}(t)$  für die dynamische Analyse zeigt sich nun deutlich: Die Vektorfunktion  $\mathcal{U}(t)$  enthält, wenn sie bekannt ist, die gesamte Information über einen Konzentrationsprozeß im Zeitablauf; wäre also  $\mathcal{U}(t)$  bekannt, so wäre es möglich, dynamische Konzentrationsmessung in einem sehr strengen Sinn zu betreiben, denn

$\mathcal{U}(t)$  beschreibt ja in vollem Umfang, wie sich die Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag der  $n$  Merkmalsträger im Zeitablauf kontinuierlich verändern. In Analogie zur statischen Konzentrationsmessung wären Begriffe wie "vollständige Konzentration" und "vollständige Nichtkonzentration" im dynamischen Sinn, d.h. ebenfalls als Vektorfunktionen wie  $\mathcal{U}(t)$ , einzuführen; dynamische Konzentrationsmessung im strengen Sinn bedeutet dann die Einordnung der Funktion  $\mathcal{U}(t)$  zwischen diese

beiden Extrema.

Die Verfahren, die bis jetzt zur quantitativen Darstellung von Konzentrationsprozessen entwickelt wurden, gehen im allgemeinen so vor, daß die Konzentrationszustände zu zwei Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , zueinander in Beziehung gesetzt werden<sup>1)</sup>:

So definiert z.B. Bruckmann den dynamischen Aspekt des Konzentrationsbegriffes als "Veränderung dieser Ungleichheit (der Ungleichheit in der Verteilung von Merkmalsbeträgen auf Merkmalsträger) zwischen zwei verschiedenen Zeitpunkten"<sup>2)</sup>. Akzeptiert man diese Interpretation des dynamischen Aspektes der Konzentration und sieht es als ausreichend für die quantitative Darstellung des Konzentrationsprozesses an, die Konzentrationszustände von zwei verschiedenen Zeitpunkten miteinander zu vergleichen, so verzichtet man damit auf die Information, die man durch die Einbeziehung der zwischen  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , liegenden Werte  $a_{ij}$  (bzw.  $x_{ij}$ ) in die Analyse zusätzlich erhalten würde. Demgemäß ist es wohl richtiger, diese bisher entwickelten Verfahren zur Darstellung von Konzentrationsprozessen einer komparativ-statischen Betrachtungsweise des

---

<sup>1)</sup> Diese etwas ungewöhnliche Schreibweise zur Bezeichnung zweier Zeitpunkte wurde gewählt, um zum Ausdruck zu bringen, daß i.a. eine komparativ-statische Analyse nicht für zwei in der Matrix  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{X}$  aufeinanderfolgende Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_{i+1}$  vorgenommen wird, sondern die in die Analyse einbezogenen Zeitpunkte (die dann gewöhnlich mit  $t_1$  und  $t_2$  bezeichnet werden) meist einige Perioden auseinanderliegen.

<sup>2)</sup> Bruckmann, G., a.a.O. S. 183

Konzentrationsphänomens zuzuordnen mit der ein erster Schritt in Richtung auf eine dynamische Betrachtungsweise unternommen wird<sup>1)</sup>). In diesem Zusammenhang soll aber auch darauf hingewiesen werden, daß eine Verbindung zwischen den ebenerwähnten Betrachtungsweisen recht gut hergestellt werden kann: Geht man bei einer komparativ-statischen Analyse in mehreren Stufen vor, d.h. setzt man die Verteilung der  $x_{ij}$  auf die  $n$  Merkmalsträger von  $t_1$  zu  $t_5$ , dann z.B. von  $t_5$  zu  $t_{10}$  usw. für alle verfügbaren Zeitpunkte zueinander in Beziehung, so wird die dynamische Analyse der Gesamtentwicklung mit Hilfe mehrfacher komparativ-statischer Analysen über "mehrere Stufen" durchgeführt. So ist es z.B. denkbar, die Entwicklung, wie sie sich in der  $(m,n)$ -Matrix  $X$  zeigt, mit Hilfe von  $m-1$  komparativ-statischen Analysen zu erörtern und so der eigentlich dynamischen Analyse mit Hilfe von komparativ-statischen Analysen so nahe wie möglich zu kommen, wenn auch der Unterschied letztlich doch bestehen bleibt. Als Beispiel hierzu sei die Analyse von Hart und Prais<sup>2)</sup> angeführt: Es standen dort Zeitreihen - die Größe von Industrieunternehmen betreffend - für die Jahre 1885 bis 1950 zur Verfügung. In die Analyse - auf deren Art zunächst nicht genauer

---

1) Kellerer H. und Schaich E., Statistische Probleme der Erfassung von Konzentrationsphänomenen. In: die Konzentration in der Wirtschaft, 2. Auflage herausgegeben von H. Arndt, Band 1, Berlin 1971, S. 68

2) Hart P.E. und Prais S.J., The Analysis of Business Concentration: A Statistical Approach in: Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 119, 1956, S. 150-180.

eingegangen werden soll - wurden jedoch nur die Zustandsveränderungen von 1885/96, 1896/1907, 1907/24, 1924/39 und 1939/50 berücksichtigt. Im hier vertretenen Sinne ist, wie eben erörtert, ein derartiges Vorgehen als komparativ-statische Betrachtung über mehrere Stufen, nicht eigentlich als dynamische Betrachtung des Konzentrationsprozesses zu verstehen, denn die Darstellung dieses Prozesses erfolgt über die Einbeziehung von Zustandsveränderungen über insgesamt fünf Stufen.

Abschließend zu diesem Abschnitt sei festgehalten, daß in der vorliegenden Arbeit versucht werden soll, den Konzentrationsprozeß quantitativ so darzustellen, daß von einer dynamischen Betrachtung in einem erweiterten Sinn als bei den bisher entwickelten Verfahren gesprochen werden kann: Ausgehend von einer Matrix  $\mathcal{U}$ , die in der eingangs angeführten Weise der Beobachtung der Realität entspringt, soll zur dynamischen Konzentrationsmessung die gesamte in  $\mathcal{U}$  enthaltene Information eingehen, d.h. jeder Funktionswert  $a_{ij}$  der  $n$  Zeitreihen  $a_j(t)$  ist in die Betrachtung einzubeziehen und bei der Entwicklung eines dynamischen Konzentrationsmaßes zu berücksichtigen.

## 1.2 Absolute und relative Konzentration

Jede Arbeit, die sich mit dem Phänomen der Konzentration beschäftigt, widmet einen Teil der Ausführungen den Konzepten der absoluten und der relativen Konzentration. Auch im nun folgenden Abschnitt sollen dazu einige Überlegungen angestellt werden, wobei allerdings nach Möglichkeit jeweils der Bezug zur dynamischen Konzentrationsmessung hergestellt wird.

Der Unterschied zwischen den beiden angeführten Konzepten der absoluten und der relativen Konzentration ergibt sich aus der unterschiedlichen Fragestellung, von der die jeweilige Analyse ausgeht. Bezüglich absoluter Konzentration richtet sich das Interesse darauf, ob "ein großer Teil des Gesamtmerkmalsbetrages  $A_i$  auf nur absolut wenige Merkmalsträger entfällt". Bezüglich der relativen Konzentration fragt man danach, ob "ein Großteil des Gesamtmerkmalsbetrags auf einen kleinen Teil von Merkmalsträgern entfällt". <sup>1)</sup>

---

<sup>1)</sup> Bruckmann, G., a.a.O., S. 184

Bruckmann präzisiert wie folgt: "Eine Aussage bezüglich absoluter Konzentration ... lautet dahingehend, daß  $q_k$  % des gesamten Merkmalsbetrags auf die obersten  $k$  Merkmalsträger entfallen, eine Aussage bezüglich relativer Konzentration, daß  $q_r$  % des gesamten Merkmalsbetrages auf die obersten  $r$  Prozent aller Merkmalsträger entfallen."<sup>1)</sup> Für die entsprechende Analyse ist also in beiden Fällen eine Gruppierung der Merkmalsträger nach der Größe ihres Merkmalsbetrages vorzunehmen; damit sind also in beiden Fällen Rangbetrachtungen mit zu berücksichtigen.

In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, daß sich etwa in den letzten zehn Jahren eine Betrachtungsweise durchgesetzt hat, die zwischen den Konzepten der absoluten und der relativen Konzentration differenziert. Diese differenziertere Betrachtung baut auf einer strengeren Definition des Begriffs "vollständige Nichtkonzentration" auf, in die sowohl der Aspekt der absoluten als auch der der relativen Konzentration einbezogen wird.<sup>2)</sup> Die Problematik der gebräuchlichen statischen Konzentrationsmaße liegt darin, daß "sie nur dort eindeutig messen, wo die Gesamtzahl der Trägerein-

---

<sup>1)</sup> Bruckmann, G., a.a.O., S. 184/185

<sup>2)</sup> Bezüglich eines anschaulichen Beispiels aus dem landwirtschaftlichen Bereich vgl. Kellerer H. und Schaich E., a.a.O., S. 42

heiten feststeht, da ... sich ... eine Definition der völligen Nichtkonzentration als Gleichverteilung der Objekteinheiten auf die Träger-einheiten geben läßt."<sup>1)</sup>

Im Fall  $a_{i1} = \dots = a_{ij} = \dots = a_{in} = \frac{A_i}{n}$  geben diese Konzentrationsmaße daher die Auskunft, es liege keine Konzentration vor, auch wenn die Anzahl  $n$  der Merkmalsträger so klein ist, daß man eigentlich wegen dieser geringen Anzahl von Konzentration spricht. Der Grund dafür ist die gleichmäßige Aufteilung des Gesamtmerkmalsbetrags auf die vorhandenen wenigen Merkmalsträger in der oben angegebenen Art.

Es ist den Überlegungen H. Münznern zuzuschreiben, durch Einführung eines Parameters  $n_0$  in die quantitative Darstellung von Konzentrationerscheinungen zur Lösung der oben dargestellten Problematik entscheidend beigetragen zu haben. Der Parameter  $n_0$  ist dabei definiert als "die Anzahl der (Merkmals-)Träger, auf die die Objekte (= Merkmalsbeträge) gleichmäßig verteilt sein müssen, damit der Sachverhalt völliger Nichtkonzentration auch wirklich erfüllt ist. Die Anzahl  $n_0$  braucht dabei nicht mit der Anzahl  $n$  der vorhandenen Merkmalsträger übereinzustimmen."<sup>2)</sup>

---

<sup>1)</sup> Bruckmann, G., a.a.O., S. 188

<sup>2)</sup> Münzner, H., Probleme der Konzentrationsmessung in: Allg.Stat.Archiv, 47, 1963, S.3

Die Anzahl  $n_0$  "ist nicht statistisch zu ermitteln".<sup>1)</sup>  $n_0$  kann vielmehr nur mit Hilfe sachbezogener Kriterien bestimmt werden, wenn man bedenkt, daß damit völlige Nichtkonzentration

als Verteilung mit  $a_{i1} = \dots = a_{ij} = \dots = a_{in_0} = \frac{A_i}{n_0}$

bestimmt wird. Damit erhält der Begriff "vollständige Nichtkonzentration" einen neuen, zusätzlichen Aspekt, der es erlaubt, in Konzentrationsanalytischen Überlegungen ein sehr wichtiges Kriterium zu berücksichtigen; denn für  $n_0 > n$  (wie es in der Realität meist anzunehmen sein wird) "gehen in die Betrachtung  $n_0 - n$  fiktive Merkmalsträger ein, denen jeweils der Merkmalswert 0 zuzuordnen ist."<sup>2)</sup> Der Parameter  $n_0$ , der also dazu dient, vollständige Nichtkonzentration zu definieren, muß auch in die Definition des anderen Extrems - der vollständigen Konzentration - bestimmt durch die Verteilung  $a_{i1} = \dots = a_{ij-1} = a_{ij+1} = \dots = a_{in_0} = 0$

---

<sup>1)</sup> Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O. S. 44

<sup>2)</sup> Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O. S. 5  
Münzner, H., a.a.O., S. 4 ff.

und  $a_{ij} = A_i$  (mit  $j \in \{1, 2, \dots, n_0\}$ )  
mit einbezogen werden, denn je größer  $n_0$ , desto  
ungleichmäßiger ist die Aufteilung des Gesamt-  
merkmalsbetrags  $A_i$  unter den Merkmalsträgern  
und desto "stärker" ist der Konzentrations-  
stand, wenn der Gesamtmerkmalsbetrag  $A_i$  auf  
einen einzigen Merkmalsträger konzentriert ist.

Ebenso wie die bisher entwickelten statischen  
Konzentrationsmaße eingeteilt werden in solche,  
die absolute Konzentration und in solche, die  
relative Konzentration messen (z.T. unter Be-  
rücksichtigung der Verbindung zwischen beiden  
Konzepten mit Hilfe des Parameters  $n_0$ ) kann  
man auch die Konzentrationsmaße zur dynamischen  
Konzentrationsmessung in diese beiden Gruppen  
einteilen. Diese Einteilung führt Bruckmann in  
seinem Aufsatz <sup>1)</sup> durch. Als Maßzahlen zur  
Veränderung der absoluten Konzentration geht  
er z.B. auf Grossacks Regressionskoeffizien-  
ten sowie Konzentrationsmaße von Hart und  
Prais ein. <sup>2)</sup> Zur Messung der Veränderung der re-  
lativen Konzentration greift Bruckmann auf Münzners

---

<sup>1)</sup> Bruckmann, A., a.a.O. S. 204 ff.

<sup>2)</sup> s. Abschnitte 2.1.2 und 2.1.3

$K_3$  zurück, das analog dem Gini'schen Konzentrationsverhältnis unter Berücksichtigung des Parameters  $n_0$  definiert ist. Es ist zweifellos richtig, in diesem Zusammenhang auf die Problematik richtiger Annahmen bezüglich  $n_0$  einzugehen, denn zu der Schwierigkeit - bei statischer Konzentrationsmessung -  $n_0$  für einen Zeitpunkt  $t_1$  dem Sachzusammenhang entsprechend anzugeben - tritt für die dynamische Konzentrationsmessung noch die weitere Schwierigkeit hinzu,  $n_0 = n_0(t)$  als Funktion der Zeit anzugeben. <sup>1)</sup> Bei komparativ-statischer Betrachtung eines Konzentrationsprozesses reduziert sich das Problem allerdings darauf,  $n_0$  für die in die Analyse einbezogenen Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_{i+1}$ , dem Sachzusammenhang entsprechend anzugeben, da ja nur eben diese beiden Zeitpunkte in die Betrachtung eingehen. Bruckmann zeigt, daß es dann dafür häufig schon ausreicht, wenn über das Verhältnis

$n_0^i : n_0^{i+1}$  <sup>2)</sup> richtige Ansätze gemacht werden, denn die von Bruckmann definierten Maßzahlen zur komparativ-statischen Konzentrationsmessung haben unter bestimmten Voraussetzungen den Vorteil, nur vom Verhältnis  $n_0^i : n_0^{i+1}$  abzuhängen. <sup>3)</sup>

Als Zwischenergebnis der bisherigen Erörterungen läßt sich festhalten, daß man bisher versucht hat, das "Phänomen" Konzentration in vier Kategorien einzuteilen und Unterschiede sowie Beziehungen zwischen

---

<sup>1)</sup> Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O., S. 7

<sup>2)3)</sup> Bruckmann, A., a.a.O. S. 207

diesen Kategorien herauszuarbeiten (vgl. nachstehende schematische Darstellung):

| Konzept       |                    | Konzentration |         |
|---------------|--------------------|---------------|---------|
| Aspekt        |                    | absolut       | relativ |
| Konzentration | statisch           |               |         |
|               | komp.-<br>statisch |               |         |

Demgemäß ließen sich alle bisher entwickelten Maßzahlen, die der Analyse von Konzentrationserscheinungen dienen sollen, in obiges Schema einordnen. Insbesondere gilt das aber für diejenigen Maßzahlen, die auf die Berücksichtigung von  $n_0$  und damit auf die Berücksichtigung der Beziehungen zwischen absoluter und relativer Konzentration verzichten.

### 1.3 Bedeutung des dynamischen Aspekts in der Konzentrationsmessung

In den einleitenden Absätzen zur Betrachtung von Konzentrationsprozessen weisen Hart und Prais recht klar auf die Bedeutung des dynamischen Aspekts der Konzentration hin. Sie unterscheiden zwischen Industriezweigen mit einer starren Struktur in einem weiter unten zu definierenden Sinn und solchen mit einer beweglicheren Struktur und schließen folgendermaßen: "Industrien, die sowohl einen hohen Grad an (statischer) Konzentration als auch eine starre Struktur haben, sind diejenigen, von denen man annehmen kann, es seien Elemente von Monopolmacht vorhanden."<sup>1)</sup> Damit ist das Wesentliche schon angesprochen: Maßzahlen, die Auskunft über die Ungleichmäßigkeit der Verteilung von Merkmalsbeträgen auf Merkmalsträger für einen Zeitpunkt  $t_i$  geben - also eine Zeile in den Matrizen  $U$  und  $X$  betrachten - können nur eine Seite des Konzentrationsphänomens beleuchten; sie müssen ergänzt werden durch dynamische Betrachtungen, die im Endeffekt erst eine objektive Beurteilung der Verhältnisse erlauben (zumal statische Konzentrationsmaße i.a. ja nur zur Charakterisierung der Verhältnisse in einem bereits vergangenen Zeitpunkt herangezogen werden); denn es ist in der Tat ein wichtiger Unterschied, ob "in einem Industriezweig die größte Firma heute auch die größte Firma vor hundert Jahren war, und das für alle Firmen der

---

<sup>1)</sup> Hart, P.E. und Prais, S.J., a.a.O. S. 161

Ranggröße nach in gleicher Weise gilt, oder ob in einem anderen Industriezweig Konkurrenz und Neuerungen derart waren, daß keine Firma ihren Rang innerhalb der Größenverteilung lange halten konnte." <sup>1)</sup>

H a r t und P r a i s setzten ihren Gedankengang fort, indem sie zunächst in einem Beispiel andeuten, in welche Richtung ihre Untersuchungen gehen; typische Fragen, die es bei der Beurteilung eines Konzentrationsprozesses zu beantworten gibt, sind für Hart und Prais: "ob große Firmen immer groß und kleine immer klein waren; ob die Wahrscheinlichkeit, daß eine Firma liquidiert oder von einer anderen Firma absorbiert wird, mit der Größe der Firma abnimmt; ob neue Firmen immer klein anfangen und erst allmählich im Zeitablauf größer werden." <sup>2)</sup>

K e l l e r e r und S c h a i c h systematisieren bezüglich der eben angeführten Problematik, indem sie drei Entwicklungskomponenten unterscheiden, die es bei der Analyse eines Konzentrationsprozesses zu berücksichtigen gilt:

- 1) Die Merkmalsbeträge  $a_{ij}$  sind in der in Abschnitt 1.1 angegebenen Art als Funktionswerte der Zeitfunktion  $a_j = a_j(t)$  aufzufassen.
- 2) Ein wichtiger Aspekt eines Konzentrationsprozesses ist die Veränderung - in der Realität häufig eine Verminderung - der Anzahl  $n$  der Merkmals-

---

<sup>1)2)</sup> Hart, P.E. und Prais, S.J., a.a.O.  
S. 161

träger in der Grundgesamtheit im Zeitablauf. <sup>1)</sup>  
"Im allgemeinen ist die Vorstellung, der Umfang der Gesamtheit ändere sich im Zeitablauf nicht, unzutreffend." <sup>2)</sup> Eine wesentliche Komponente eines Konzentrationsprozesses wird daher durch die Einführung einer Zeitfunktion  $n = n(t)$  in die Analyse berücksichtigt; dabei kann sich  $n(t)$  folgendermaßen verändern:

- a) durch Zugänge, z.B. durch Neugründungen von Unternehmen
  - b) durch Abgänge, z.B. durch Liquidation von Unternehmen
  - c) Abnahme von  $n$  durch Vereinigung von Merkmalsträgern, z.B. Fusion von Unternehmen
  - d) Zunahme von  $n$  durch Aufgliederung von Unternehmen, z.B. Verselbständigung von Teilbetrieben
- 3) Ebenso wie bei der statischen und der komparativ-statischen Betrachtung des Konzentrationsphänomens müßte bei der Analyse eines Konzentrationsprozesses der Parameter  $n_0$  berücksichtigt werden, dabei nun als Zeitfunktion  $n_0(t)$ . Die Funktion  $n_0(t)$  hat dann die Eigenschaft, analog zur Bedeutung von  $n_0$  bei der statischen Betrachtung, für jeden Zeitpunkt  $t_i$  die Anzahl  $n_0$  von Merkmalsträgern anzugeben, auf die der Gesamtmerkmalsbetrag

---

<sup>1)</sup> vgl. z.B. Süddt. Zeitung, Nr. 134, 5./6. Juni 1971, S. 25/26

<sup>2)</sup> Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O., S. 6

gleichmäßig aufgeteilt sein müßte, damit man von "vollständiger Nichtkonzentration im Sinn eines Konzentrationsprozesses" sprechen kann.<sup>1)</sup>

Die Bedeutung der soeben unter 1) bis 3) erörterten Entwicklungskomponenten für die Charakterisierung eines Konzentrationsprozesses, sowie die Schwierigkeiten, denen man gegenübersteht, wenn man versucht, diese Komponenten mit einem dynamischen Konzentrationsmaß quantitativ in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit zu erfassen, lassen sich recht anschaulich mit Hilfe des in Abschnitt 1.1 für die Darstellung von Konzentrationsprozessen entwickelten Instrumentariums zeigen.

Zu einem Zeitpunkt  $t_1$ , zu dem mit der Analyse des Konzentrationsprozesses begonnen werden soll, sei eine Grundgesamtheit von  $n$  Merkmalsträgern vorhanden, wobei jedem der  $n$  Merkmalsträger ein Anteil  $x_{1j} \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) am Gesamtmerkmalsbetrag zuzuordnen sei; selbstverständlich gilt  $\sum x_{1j} = 1$ . Wie in 1.1 erörtert, ist es möglich, diesen Konzentrationszustand in einem  $n$ -dimensionalen Koordinatensystem durch einen Vektor zu charakterisieren, der die Lage des "Konzentrationspunkts" zur Zeit  $t_1$  angibt. Veränderungen der Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag der  $n$  Merkmalsträger im Zeitablauf (die oben unter 1) erörterte Entwicklungskomponente) äußern

---

<sup>1)</sup> Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O., S. 7

sich zunächst in der Bewegung des Punktes auf der Hyperebene  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ ; diese Bewegung läßt sich mit Hilfe der ebenfalls in 1.1 eingeführten Vektorfunktion  $\gamma(t)$  beschreiben.

Auch die oben unter Punkt 2) erörterte Entwicklungskomponente, die die Veränderung der Anzahl  $n$  der Merkmalsträger in die Analyse einbezieht ( $n = n(t)$ ), läßt sich in diesem Modell gut erfassen, indem die Dimension des Koordinatensystems als zeitabhängig in die Modellvorstellung eingeführt wird. Entsprechend der Veränderung von  $n$  bewegt sich der "Konzentrationspunkt" zu verschiedenen Zeitpunkten in Koordinatensystemen von unterschiedlicher Dimension.<sup>1)</sup> Für den in der Realität meist gültigen Fall, daß  $n(t)$  im Zeitablauf abnimmt, heißt das, daß sich der Punkt von seiner Ausgangslage auf einen Rand der Hyperebene  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$  zubewegt hat. Dabei ist zu bedenken, daß hierbei unter einem Rand Hyperebenen des  $\mathbb{R}^{n-1}$  oder  $\mathbb{R}^{n-2}$  oder  $\mathbb{R}^{n-3}$  usw. verstanden werden. Die Gleichungen dieser Hyperebenen sehen ähnlich aus wie die der Ausgangsebene, nur treten in der Summe nun die Koordinaten der Merkmalsträger nicht mehr auf, deren Anteil  $x_{ij}$  zu Null geworden ist. Für die bei

---

<sup>1)</sup> Man kann auch die Dimension des ursprünglichen Koordinatensystems aufrechterhalten. Dann treten in der Vektorschreibweise für die Lage des Konzentrationspunktes entsprechend mehr Nullen als Komponenten auf.

der Analyse des Konzentrationsprozesses zugrunde liegende Vektorfunktion  $\mathcal{C}_{[n_i]}(t)$  bedeutet das, daß die Anzahl der Komponenten dieser Vektorfunktion zeitabhängig angesehen werden muß; dabei beschreibt  $\mathcal{C}_{[n_i]}(t)$ , welchen Weg der "Konzentrationspunkt" genommen hat, insbesondere über welche Ränder dieser Weg geführt hat.<sup>1)</sup>

Schließlich läßt sich auch noch die dritte o.a. Entwicklungskomponente  $n_o$  als zeitabhängige Funktion  $n_o(t)$  im vorliegenden Modell berücksichtigen. Die Funktion  $n_o(t)$  gibt für jeden Zeitpunkt  $t_1$  die "Solldimension" der Grundgesamtheit an, in der sich der Konzentrationsprozeß vollzieht. Da im allgemeinen wohl  $n_o(t) > n(t)$  angenommen werden kann, enthält die den Prozeß im  $\mathbb{R}^{n_o}$  beschreibende Vektorfunktion  $\mathcal{C}(t)$  nun  $n_o(t) - n(t)$  Komponenten, für die  $x_j(t) = 0$  gilt;  $\mathcal{C}(t)$  gibt somit für jeden Zeitpunkt  $t_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) folgende Auskünfte:

---

<sup>1)</sup> An dieser Stelle sei kurz hingewiesen auf die Theorie der Linearen Optimierung. Der Zusammenhang zur angeschnittenen Problematik ergibt sich daraus, daß man die hier diskutierte "Konzentrationsebene", nämlich die Hyperebene  $\sum x_{ij} = 1$ , als Simplex betrachten kann. Der Hinweis sei vor allem deshalb gebracht, weil die Vorstellung von den Rändern der Simplex (beim allgemeinen  $n$ -dimensionalen Fall) sich auf die Ränder der hier zu diskutierenden "Konzentrationsebene" übertragen lassen.

- a) Wie sich von  $t_i$  zu  $t_{i+1}$  die  $x_{ij}$  verändert haben, d.h.  $\mathcal{C}(t)$  beschreibt, in welcher Richtung sich der "Konzentrationspunkt" fortbewegt hat (erste o.a. Entwicklungskomponente)
- b) Wie sich von  $t_i$  zu  $t_{i+1}$  die Anzahl der Merkmals-träger verändert hat, insbesondere welche Komponenten der Vektorfunktion zu  $t_{i+1}$  den Wert Null angenommen haben (zweite o.a. Entwicklungskomponente)
- c) Wie sich das Verhältnis  $n_0 : n$  im Zeitablauf entwickelt, ob also z.B. von zunehmender Konzentration wegen einer verminderten Anzahl  $n$  von Merkmalsträgern bei unveränderter Verteilung von Objekteinheiten auf (verbleibende) Trägereinheiten im Zeitablauf zu sprechen ist (dritte o.a. Entwicklungskomponente).

Die Diskussion der Entwicklungskomponenten, die es allgemeiner Auffassung nach bei der Beurteilung eines Konzentrationsprozesses zu berücksichtigen gilt, hat also zu dem Ergebnis geführt, daß in dem hier entwickelten Modell zur Beschreibung eines derartigen Prozesses die zuletzt in die Betrachtung eingeführte Funktion  $\mathcal{C}(t)$  das geeignete Instrument wäre, denn in  $\mathcal{C}(t)$  finden alle erörterten Entwicklungskomponenten Berücksichtigung.

An Hand der in dieser Arbeit entwickelten Modellvorstellungen läßt sich nun in sehr allgemeiner Form - und daher mit dem Anspruch auf Allgemeingültigkeit -

darstellen, daß der bisher bei der Entwicklung von Konzentrationsmaßen meist unternommene Versuch, die Lage bzw. Bewegung eines Punktes im  $\mathbb{R}^n$  durch ein eindimensionales Maß zu charakterisieren, zur Mehrdeutigkeit dieser Maße führen muß - eine Tatsache, die insbesondere für statische Konzentrationsmaße bereits mehrfach erörtert wurde.<sup>1)</sup> Die Mehrdeutigkeit resultiert daraus, daß bei der Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^1$ , als die die Angabe eines solchen Maßes anzusehen ist, auf Information verzichtet wird. Dabei ist der Informationsverlust bei einer derartigen Abbildung selbstverständlich umso größer, je höher die Dimension des Raumes ist, in dem die "Konzentrationsfläche" liegt, d.h. also je mehr Merkmalsträger in die Betrachtung einzubeziehen sind. Darüberhinaus ist zu bedenken, daß sich dieser Informationsverlust bei dynamischer Konzentrationsmessung gegenüber der statischen Konzentrationsmessung noch gravierender auswirken muß, da eine Abbildung in der oben erwähnten Art des  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^1$  notwendigerweise auch bezüglich aller oben erörterten Entwicklungskomponenten mehrdeutig sein muß.

---

<sup>1)</sup> vgl. z.B. Schaich, E., Lorenzkurve und Gini-Koeffizient in kritischer Betrachtung, in: Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 185, Heft 3, (1971); Taguchi, T., Concentration Curve Methods and Structures of Skew Populations - a Methodology for the Analysis of Economic Data, in: Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 20, 1968, Nr. 1, S. 111 f. (The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo)

Die Konsequenz, die aus den eben angestellten Überlegungen zu ziehen ist, lautet also dahingehend, daß sich Konzentrationsmaße grob gesagt nur darin unterscheiden, daß bestimmten Komponenten unterschiedliches Gewicht verliehen wird; demgemäß reflektieren z.B. fast alle statischen Konzentrationsmaße diese oder jene Aspekte eines Konzentrationszustandes unterschiedlich stark; gleiches gilt, wie das folgende Kapitel zeigen wird, für komparativ-statische Konzentrationsmaße.

Nachdem in diesem ersten Kapitel versucht worden ist, die Problematik der Konzentrationsmessung in allgemeiner Form darzustellen, und dazu ein Modell vorgestellt wurde, an Hand dessen sich diese Problematik besonders anschaulich erläutern läßt, soll das nächste Kapitel der Darstellung einiger bisher entwickelter Verfahren zur dynamischen Konzentrationsmessung gewidmet sein. Das im ersten Kapitel aufgezeigte Modell soll dabei in dem Sinn hilfreich sein, als es zur Veranschaulichung der Art der Abbildung dienen soll, die durch das jeweilige Konzentrationsmaß vorgenommen wird.

## 2. Verfahren zur komparativ-statischen Konzentrations- messung

Wie bereits im Abschnitt 1.1 erörtert, sind alle bisher entwickelten Verfahren zur dynamischen Konzentrationsmessung im eigentlichen Sinn einer komparativ-statischen Betrachtungsweise zuzuordnen, denn sie beziehen nur die Konzentrationszustände zu zwei Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_{1+1}$ , in die Betrachtung ein. Die Eigenschaften einiger dieser Verfahren sollen nun kurz untersucht werden, um einen kleinen Überblick darüber zu erhalten, welche Komponenten des Konzentrationsprozesses mit Hilfe dieser Verfahren dargestellt werden und auf welche Weise diese Darstellung erfolgt.

Bei dieser Erörterung soll der zu Ende des Abschnitts 1.2 entwickelten Systematik gefolgt werden, sodaß zunächst Verfahren zur Messung der Veränderung der absoluten Konzentration, sodann Verfahren zur Messung der Veränderung der relativen Konzentration aufgeführt werden sollen. Den Abschluß dieses zweiten Kapitels bilden dann einige generelle Gedanken zur Kritik dieser komparativ-statischen Vorgehensweisen bei der Analyse von Konzentrationsprozessen.

## 2.1 Die Veränderung der absoluten Konzentration und Verfahren zu ihrer Messung

### 2.1.1 Vergleich von statischen Konzentrationsmaßen für zwei Zeitpunkte $t_i$ und $t_{i+1}$

Eine erste, naheliegende Möglichkeit zur komparativ-statischen Konzentrationsmessung besteht darin, Konzentrationskoeffizienten, wie sie für die Analyse statischer Konzentration berechnet werden, für die in die Betrachtung eingehenden Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_{i+1}$  zu ermitteln und einander gegenüberzustellen.

Untersuchungen dieser Art wurden von H e r f i n - d a h l und von R o s e n b l u t h <sup>1)</sup> durchgeführt. Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang besonders die Ergebnisse Rosenbluths, dem der Nachweis gelang, daß "der Wert des Konzentrationskoeffizienten für einen bestimmten Wirtschaftszweig ein gewogenes Mittel der einzelnen Untergruppen dieses Wirtschaftszweiges darstellt, so daß er nicht nur die Veränderung in der Konzentration dieser Untergruppen, sondern auch die Veränderung in der rela-

---

<sup>1)</sup> Herfindahl, O.: Concentration in the Steel Industry. Diss. Columbia-University, 1950.  
Rosenbluth, G.: "Measures of Concentration", in: Business Concentration and Price Policy. National Bureau of Economic Research, Special Conference Series Nr. 5, Princeton 1955.  
S. 57-99.

tiven Bedeutung der Untergruppen widerspiegelt."<sup>1)</sup>

Wie einzelne Konzentrationskoeffizienten typische Komponenten eines Konzentrationsprozesses wiedergeben haben etwa S c h a i c h und K e l l e r e r untersucht.<sup>2)</sup>

Für einige Koeffizienten, die zur Darstellung statischer Konzentration verwendet werden (z.B. die Konzentrationsmaße von Gini <sup>3)</sup>, Herfindahl <sup>4)</sup>, Hildenbrand und Paschen <sup>5)</sup> gilt:

1) Bruckmann, A., a.a.O., S. 204

2) Kellere H. und Schaich, E., a.a.O., S. 51-68

3) Definition des Konzentrationsmaßes von Gini:

$$K_G = \frac{\Delta}{2\mu} ; \mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j ; \Delta = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{j'=1}^n |a_j - a_{j'}|$$

4) Definition des Konzentrationsmaßes von Herfindahl:

$$K_H = \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_j}{A} \right)^2$$

5) Definition des Konzentrationsmaßes von Hildenbrand und Paschen:

$$K_{HP} = k \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{A} \log \frac{a_j}{A} \quad \begin{array}{l} k: \text{positive Konstante,} \\ \text{nach Meinung der Autoren} \\ \text{mit 100 festzulegen} \end{array}$$

Anm.: Bei der Definition der Konzentrationsmaße wurde auf die Bezugnahme zur Zeit, die sich durch Einführung eines entsprechenden Index leicht berücksichtigen ließe, verzichtet.

a) Verändern sich die Merkmalsbeträge von  $t_i$  zu  $t_{i+1}$  in der Art, daß  $a_{i+1',j} = c \cdot a_{ij}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) gilt - man spricht dann falls  $c > 1$  von "gleichschrittigem Wachstum" - so nimmt jeder dieser Koeffizienten für  $t_i$  und  $t_{i+1}$  den gleichen numerischen Wert an und gibt somit die Auskunft, daß die Konzentration zu beiden Zeitpunkten gleich ist.

b) Unter der Voraussetzung, daß die  $n$  Merkmalsträger für  $t_i$  nach der Größe ihrer Merkmalsbeträge geordnet sind, gilt zusätzlich folgendes:

Liegt eine Veränderung in der Art vor, daß

$a_{i+1',j} = c_j \cdot a_{ij}$  gilt, wobei  $c_{j_p} < c_{j_q}$

$j_p < j_q$  ( $j_p, j_q \in \{1, \dots, n\}$ ), so weisen die Konzentrationskoeffizienten auf eine Erhöhung der Konzentration zu  $t_{i+1}$

gegenüber  $t_i$  hin. Die Ungleichungen bedeuten, daß bei gleicher Rangfolge der Merkmalsträger die Merkmalsbeträge der "Kleineren" weniger stark zugenommen haben, als die Merkmalsbeträge der "Größeren".

Entwicklungen der soeben unter a) und b) dargestellten Art können also mit Hilfe des Vergleichs

der o.a. statischen Konzentrationskoeffizienten entsprechend beurteilt werden. Das gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, daß die Anzahl  $n$  der Merkmalsträger im Zeitablauf zwischen  $t_i$  und  $t_{i+i}$ , unverändert geblieben ist. Ebenso muß der Parameter  $n_0$  außer Betracht bleiben, d.h. es muß sachlogisch gerechtfertigt sein,  $n = n_0$  für  $t_i$  und  $t_{i+i}$ , zu setzen. Veränderungen von  $n_0$  können nur beim Vergleich solcher Konzentrationskoeffizienten berücksichtigt werden, in die der Parameter  $n_0$  einbezogen ist, also etwa bei Münznerns Konzentrationskoeffizienten  $K_3$ . <sup>1)</sup>

Zur quantitativen Darstellung von Änderungen in der absoluten Konzentration schlägt B r u c k m a n n die Bildung eines neuen Koeffizienten  $K_{B_1}$  vor, der als Quotient des Herfindahl'schen Konzentrationsmaßes  $K_H$  zu den beiden Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+i}$ , definiert ist:

$$K_{B_1} = \frac{K_H(t_{i+i})}{K_H(t_i)} . \text{ Diese Maßzahl hat den}$$

Vorteil, bei "einer Vermehrung aller Träger-

---

<sup>1)</sup>  $K_3 = K_G^0 = 1 - \frac{n}{n_0} (1 - K_G)$

einheiten um das  $\epsilon$ -fache<sup>1)</sup> den Wert  $\frac{1}{\epsilon}$  anzunehmen.

Der Vergleich von Konzentrationskoeffizienten der statischen Konzentrationsmessung oder auch die Bildung einer neuen Maßzahl aus solchen Konzentrationskoeffizienten (wie bei  $K_B$ ) bringen jedoch den Nachteil mit sich, daß die<sup>1</sup> Analyse eines Konzentrationsprozesses mit Hilfe dieser Verfahren - da sie ja allein aus der Gegenüberstellung zweier Zustände besteht - unbeachtet läßt, daß der Konzentrationszustand zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$ , aus dem Zustand zu  $t_i$  auf völlig unterschiedliche Weise hervorgegangen sein kann. Demgemäß sind auch die Prozesse, die die beiden Zustände zu  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , verursacht haben können unterschiedlich zu beurteilen.

K e l l e r e r     u n d     S c h a i c h     geben dazu folgendes Beispiel, dessen Darstellung der in dieser Arbeit verwendeten Terminologie entsprechend abgewandelt wurde: Betrachtet werden drei Prozesse I, II und III, bei denen sich die Verteilung der Anteile  $x_{ij}$  bei  $n = 5$  Merkmalsträgern recht unterschiedlich zwischen den Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , entwickelt hat.<sup>2)</sup>

---

<sup>1)</sup> Bruckmann, A., a.a.O. S. 206

<sup>2)</sup> Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O., S. 70

Matrix  $\mathcal{K}^I$  (  $\triangleq$  Prozess I ):

| $i \backslash j$ | 1   | 2    | 3   | 4    | 5    |
|------------------|-----|------|-----|------|------|
| 1                | .   | .    | .   | .    | .    |
| .                | .   | .    | .   | .    | .    |
| i                | 0,3 | 0,25 | 0,2 | 0,15 | 0,1  |
| .                | .   | .    | .   | .    | .    |
| i+i'             | 0,5 | 0,3  | 0,1 | 0,05 | 0,05 |
| .                | .   | .    | .   | .    | .    |

Matrix  $\mathcal{K}^{II}$  (  $\triangleq$  Prozess II ):

| $i \backslash j$ | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    |
|------------------|-----|------|------|------|------|
| 1                | .   | .    | .    | .    | .    |
| .                | .   | .    | .    | .    | .    |
| i                | 0,3 | 0,25 | 0,2  | 0,15 | 0,1  |
| .                | .   | .    | .    | .    | .    |
| i+i'             | 0,3 | 0,5  | 0,05 | 0,1  | 0,05 |
| .                | .   | .    | .    | .    | .    |

Matrix  $\mathcal{K}^{III}$  (  $\triangleq$  Prozess III ):

| $i \backslash j$ | 1    | 2    | 3   | 4    | 5   |
|------------------|------|------|-----|------|-----|
| 1                | .    | .    | .   | .    | .   |
| .                | .    | .    | .   | .    | .   |
| i                | 0,3  | 0,25 | 0,2 | 0,15 | 0,1 |
| .                | .    | .    | .   | .    | .   |
| i+i'             | 0,05 | 0,05 | 0,1 | 0,3  | 0,5 |
| .                | .    | .    | .   | .    | .   |

Man erhält für alle Prozesse:

a) Gini'sches Konzentrationsverhältnis:

$$K_G(t_i) = 0,22$$

$$K_G(t_{i+1}) = 0,47$$

b) Herfindahl'sches Konzentrationsmaß:

$$K_H(t_i) = 0,225$$

$$K_H(t_{i+1}) = 0,355$$

c) Bruckmann'sche Maßzahl

$$K_{B_1} \approx 1,56$$

Das hier angeführte Beispiel kann auch mittels der im ersten Kapitel dieser Arbeit entwickelten Vorgehensweise betrachtet werden: Die  $i$ -te Zeile der Matrizen  $x^I$ ,  $x^{II}$ ,  $x^{III}$  beschreibt dann den Konzentrationszustand zum Zeitpunkt  $t_i$  der Modellvorstellung entsprechend durch die Angabe der Koordinaten eines Punktes  $P$  ("Konzentrationspunkt") im  $\mathbb{R}^5$  (es handelt sich in dem Beispiel ja um ein System von 5 Merkmalsträgern). Aus den angegebenen Matrizen geht hervor, daß die Vektorfunktionen  $e^I(t)$ ,  $e^{II}(t)$  und  $e^{III}(t)$  nicht gleich sein können, denn die Funktionswerte, die sie für  $t_{i+1}$  annehmen, sind verschieden. Die angegebenen Maßzahlen  $K_G$ ,  $K_H$  und  $K_{B_1}$  erweisen sich letztlich deshalb als unzureichend zur Charakterisierung des Prozesses, weil sie die Lage

des Punktes  $P$  im  $\mathbb{R}^5$  durch ein eindimensionales Maß zu beschreiben versuchen; bei dieser Abbildung (des  $\mathbb{R}^5$  in den  $\mathbb{R}^1$ ) geht aber Information verloren, insbesondere auch die "Korrelation der einzelnen Anteile am Gesamtmerkmalsbeitrag"<sup>1)</sup>, so daß aus keinem der Konzentrationsmaße zu ersehen ist, daß die Lage des Konzentrationspunktes  $P$  zu  $t_{i+i}$ , je nachdem ob Prozeß I, II oder III durchlaufen wurde, unterschiedlich ist.

Man kann versuchen, diesen Mangel zu beseitigen, indem man die Korrelation der  $x_{ij}$  mit den  $x_{i+i',j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) in die Betrachtung mit einbezieht. Ein entsprechender Ansatz wurde von G r o s s a c k<sup>2)</sup> entwickelt.

---

<sup>1)</sup> Kellere, H. und Schaich, E., a.a.O., S. 71

<sup>2)</sup> Grossack, J.M., Towards an Integration of Static and Dynamic Measures of Industry Concentration, in: Review of Economics and Statistics, 47, 1965, S. 301-308.

### 2.1.2 Grossack's Konzentrationskoeffizient zur Messung von Konzentrationsprozessen

Zunächst sei  $n(t_i) = n(t_{i+i'}) = n$ ; das Problem, die Entwicklung  $n(t)$  der Anzahl der Merkmalsträger in die Erörterung einzubeziehen, wird vorerst ausgeklammert. Ebenso sei  $n_0(t)$  im Zeitablauf konstant; es gebe keine Zugänge und keine Abgänge von Merkmalsträgern, außerdem keine Verschmelzungen oder Aufteilungen.

Grossack's Konzentrationskoeffizient - Grossack selbst bezeichnet ihn als Maßzahl für die "Monopolmacht" - ist dann definiert als

$$K_{Gr}^1) = \frac{j \sum (x_{ij} - \bar{x}_i) (x_{i+i',j} - \bar{x}_{i+i'})}{j \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}$$

wobei  $\bar{x}_i = \bar{x}_{i+i'} = \frac{1}{n}$ .

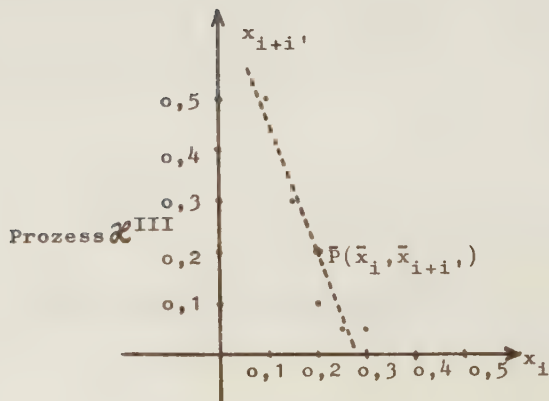
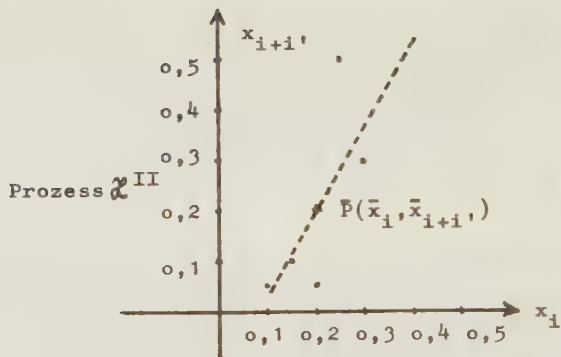
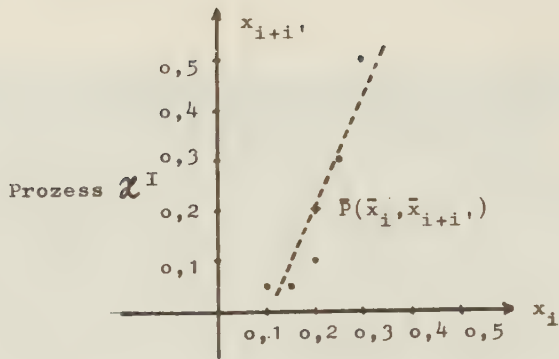
Trägt man für festes  $i$  und  $i'$  die den Zahlenpaaren  $(x_{ij}, x_{i+i',j})$  in einem kartesischen Koordinatensystem entsprechenden Punkte  $P_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) ein und bestimmt nach der Methode der kleinsten Quadrate die Gleichung der Regressionsgeraden mit den aktuelleren Merkmalswertanteilen als Zielvariablen und den vorhergehenden Merkmalswertanteilen als erklärende Variablen, dann ist der Grossack'sche Konzentrationskoeffizient gleich der Steigung der Regressionsgeraden.

Für die oben genannten Beispiele<sup>2)</sup> ergibt sich jeweils folgende graphische Darstellung:

---

<sup>1)</sup> Auf die Indizierung mit  $i$  und  $i+i'$  wird hier und im folgenden der einfacheren Schreibweise halber verzichtet.

<sup>2)</sup> s.S. 38



Das Konzentrationsmaß von Grossack ist also eigentlich ein Regressionskoeffizient. Da zwischen dem Regressionskoeffizienten  $b$  und dem zugehörigen Korrelationskoeffizienten  $r$  die funktionale Beziehung

$b = r \cdot \frac{s_{i+i'}}{s_i}$  besteht <sup>1)</sup>, läßt sich  $K_{Gr}$  umformen zu

$$K_{Gr} = r \cdot \frac{s_{i+i'}}{s_i} = r \sqrt{\frac{\sum (x_{i+i',j} - \bar{x}_{i+i'})^2}{\sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}}$$

$$= r \sqrt{\frac{K_H^{i+i'} - \frac{1}{n}}{K_H^i - \frac{1}{n}}} \quad 3)$$

Daraus läßt sich erkennen, daß in  $K_{Gr}$  zwei Komponenten eingehen: zum einen mißt  $r$  die Korrelation zwischen den  $x_{ij}$  und  $x_{i+i',j}$  für die beiden Zeit-

punkte  $t_1$  und  $t_{i+i'}$ ; "

$$\sqrt{\frac{K_H^{i+i'}}{K_H^i}} \quad 2)$$

bringt die Veränderung im Konzentrationszustand in allerdings nicht ganz übersichtlicher Weise zum

---

<sup>1)</sup>  $s_i$  ist die Standardabweichung der  $x_{ij}$  zum Zeitpunkt  $t_i$ , entsprechendes gilt für  $s_{i+i'}$ ,

<sup>2)</sup>  $\frac{1}{n}$  kann bei hinreichend großem  $n$  vernachlässigt werden, vgl. Grossack, a.a.O., S.304

<sup>3)</sup> Definition von  $K_H$  siehe Fußnote S. 34

Ausdruck."<sup>1)</sup> Damit ist die bedeutendste Eigenschaft von  $K_{Gr}$ , daß "mit  $r$  ein wesentlicher Bestandteil der Monopolmacht, ... nämlich die Aufrechterhaltung oder Nichtaufrechterhaltung von Machtpositionen" der Merkmalsträger berücksichtigt wird.<sup>2)</sup>

Zur Interpretation von  $K_{Gr}$  orientiert man sich an der Beziehung  $K_{Gr} = b = r \frac{s_{i+i'}}{s_i}$  sowie eventuell an dem den Berechnungen zugrundeliegenden Streudiagramm. Es lassen sich systematisch mehrere interessante Fälle unterscheiden<sup>3)</sup> :

- 1) Für  $|r|$  nahe bei 1 liegen die Punkte  $P_j$ , die in oben dargestellter Weise die Anteile des  $j$ -ten Merkmalsträgers am Gesamtmerkmalsbetrag zu den Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+i'}$  erfassen, annähernd auf einer Geraden. Deshalb besteht zwischen  $x_{ij}$  und  $x_{i+i',j}$  auch annähernd eine lineare Abhängigkeit. Es ist daher möglich, eine Aussage über die Rangfolge der Merkmalsträger zu machen.

---

<sup>1)</sup> <sup>2)</sup> Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O., S. 37, 38

<sup>3)</sup> vgl. auch Grossack, I., a.a.O., S. 304

- a) Für  $r \approx +1$  hat die Gerade, die die funktionale Abhängigkeit zwischen  $x_{ij}$  und  $x_{i+i',j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) erklärt, eine positive Steigung. Das bedeutet, daß zu den Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+i'}$  die Rangfolge der  $n$  Merkmalsträger bezüglich ihrer Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag (bis auf einzelne Ausnahmen) die gleiche ist. (Vgl. Prozeß I, Abb. S. 42).

Der Betrag, den man dann für  $K_{Gr}$  errechnet,

hängt vom Quotienten  $\frac{s_{i+i'}}{s_i}$  ab:

$$\frac{s_{i+i'}}{s_i} < 1 \Rightarrow 0 < K_{Gr} < 1$$

die Konzentration<sup>1)</sup> hat abgenommen.

$$\frac{s_{i+i'}}{s_i} = 1 \Rightarrow K_{Gr} \approx 1$$

die Konzentration ist zu beiden Zeitpunkten gleich.

$$\frac{s_{i+i'}}{s_i} > 1 \Rightarrow K_{Gr} > 1$$

die Konzentration ist gestiegen.

---

<sup>1)</sup> Mit Konzentration ist hier und in der nachfolgenden Fallunterscheidung die Konzentration im Sinne des Herfindahl-Koeffizienten gemeint, vgl. oben S. 43

- b) Ist  $r \approx -1$  so hat die entsprechende Gerade eine negative Steigung. Daraus folgt für die Rangfolge, daß zu  $t_{i+i'}$  (bis auf einzelne Ausnahmen) den Merkmalsträgern, denen zu  $t_i$  die größeren Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag zuzuordnen waren, nun die kleineren Anteile zuzuordnen sind. Die Rangfolge zu  $t_{i+i'}$ , hat sich damit gegenüber  $t_i$  umgekehrt. (Vgl. Prozeß III, Abb. S. 42)
- $K_{Gr}$  hängt, ähnlich wie oben, dann vom Quotienten

$$\frac{s_{i+i'}}{s_i} \text{ ab:}$$

$$\frac{s_{i+i'}}{s_i} < 1 \Rightarrow -1 < K_{Gr} < 0$$

die Konzentration hat abgenommen.

$$\frac{s_{i+i'}}{s_i} = 1 \Rightarrow K_{Gr} \approx -1$$

die Konzentration ist zu beiden Zeitpunkten gleich.

$$\frac{s_{i+i'}}{s_i} > 1 \Rightarrow K_{Gr} < -1$$

die Konzentration ist gestiegen.

2. Für  $|r|$  nahe bei 0 streuen die Punkte  $P_j$ , die die Anteile des  $j$ -ten Merkmalsträgers am Gesamtmerkmalsbetrag zu den Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , erfassen, sehr stark um die zugehörige Regressionsgerade. Über eine lineare Abhängigkeit zwischen  $x_{ij}$  und  $x_{i+1,j}$  läßt sich nun keine genaue Angabe mehr machen; man kann damit auch bezüglich der Rangfolge nichts Genaues aussagen und nur die "Tendenz" für die Veränderung der Rangfolge angeben. (Vgl. Prozeß II, Abb. S. 42).

Der Quotient  $\frac{s_{i+1}}{s_i}$ , der im Fall  $|r|$  nahe bei 1 im Hinblick auf die Beurteilung der Konzentrationsveränderung verhältnismäßig aussagekräftig war, ist dies für  $|r|$  nahe bei Null nicht mehr im selben Maße. Versuche zur Fallunterscheidung, wie oben unter 1a) und 1b) durchgeführt, sind trotzdem von Grossack<sup>1)</sup> sowie von Kellerer und Schaich<sup>2)</sup> unternommen worden. Diese Fallunterscheidung soll aber aus o.a. Grund hier nicht weiter verfolgt werden.

Die eben angestellten Überlegungen geben dazu Anlaß, den Einfluß der beiden Komponenten  $r$  und  $\frac{s_{i+1}}{s_i}$  auf den Koeffizienten  $K_{Gr}$  noch etwas genauer zu untersuchen.

---

<sup>1)</sup> Grossack, J., a.a.O., S. 304

<sup>2)</sup> Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O., S.72

Aus der Gleichung für  $K_{Gr}$  (S. 43) geht hervor, daß Grossacks Konzentrationskoeffizient z.B. folgende Situationen als gleichwertig auffaßt:

$$1. \quad r \approx +1 \quad \text{und} \quad \frac{s_{i+i'}}{s_i} = c \quad (c = \text{konstant})$$

$$2. \quad r \approx 0,1 \quad \text{und} \quad \frac{s_{i+i'}}{s_i} \approx 10 \, c$$

Dazu ein einfaches Zahlenbeispiel, bei dem von  $n = 4$  Merkmalsträgern ausgegangen wird: für einen Prozeß I sei

$$e^I(t_i) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,4) \quad \text{und}$$

$$e^I(t_{i+i'}) = (0,11; 0,2; 0,29; 0,4)$$

Man errechnet dann leicht

$$r^I = 0,99, \quad \frac{s_{i+i'}^I}{s_i^I} = 0,97, \quad \text{mithin } K_{Gr}^I = 0,96$$

Mit dem eben angegebenen Prozeß I wird ein Prozeß II verglichen, für den

$$e^{II}(t_i) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,4) \quad \text{und}$$

$$e^{II}(t_{i+i'}) = (0,01; 0,49; 0,01; 0,49) \quad \text{sei.}$$

Für Prozeß II errechnet man:

$$r^{II} = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0,45 \quad \frac{s_{i+i'}^{II}}{s_i^{II}} = 0,24 \cdot \sqrt{80} \approx 2,15;$$

$$\text{damit erhält man } K_{Gr}^{II} = 0,45 \cdot 2,15 \approx 0,96 = K_{Gr}^I.$$

Obwohl also  $K_{Gr}^I = K_{Gr}^{II}$  ist, unterscheiden sich die Prozesse I und II so voneinander, daß es wohl nicht gerechtfertigt ist, diese Entwicklungen als gleichwertig zu betrachten. Ähnliche Beispiele lassen sich leicht konstruieren, auch für  $r < 0$ .

Offensichtlich ist es also zur Beurteilung eines Konzentrationsprozesses nicht ausreichend, allein den Wert für  $K_{Gr}$  zu berechnen, der sich aus den Situationen zu den für die Analyse herangezogenen Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , ergibt.

Dazu soll im folgenden gezeigt werden, daß von einem bekannten Wert des Grossack-Koeffizienten nicht eindeutig auf eine bestimmte Veränderung der Konzentrationssituation geschlossen werden kann. Setzt man  $K_{Gr} = k$  ( $k = \text{konstant}$ ) und schreibt

die Beziehung  $K_{Gr} = r \cdot \frac{s_{i+1}}{s_i}$  ( $s_i > 0$ ) in

$$r = f(k; s_i; s_{i+1}) = \frac{k \cdot s_i}{s_{i+1}} \quad (s_{i+1} > 0) \text{ um,}$$

so sieht man, daß es sich dabei um eine Fläche in einem dreidimensionalen Koordinatensystem handelt. Man erhält für jedes  $K_{Gr} = k$  eine Fläche, d.h. eine unendliche Menge von Tripeln

$(r; s_i; s_{i+1})$ , wobei  $r = k \frac{s_i}{s_{i+1}}$  gilt. Damit

ist deutlich geworden, daß die beiden Komponenten, die in Grossack's  $K_{Gr}$  eingehen, sich in ihrem Einfluß so überlagern können, daß man bei isolierter Betrachtung von  $K_{Gr}$  keine aussagekräftige Information über die Entwicklung der Konzentration im Zeitablauf bekommt.

Andererseits liefert auch die zusätzliche Vorgabe einer der drei Variablen  $r$ ,  $s_i$  und  $s_{i+1}$ , wiederum eine unendliche Menge, hier von Tupeln, die die Gleichung  $r = k \cdot \frac{s_i}{s_{i+1}}$  erfüllen; geometrisch interpretiert handelt es sich dabei um die Schnittlinie z.B. der Ebene  $r = r^*$  ( $r^* = \text{konstant}$ ) mit der Fläche  $r = k \cdot \frac{s_i}{s_{i+1}}$ .

Zur vollständigen Charakterisierung eines Konzentrationsprozesses genügt es, wie ein Beispiel und allgemeine Überlegungen gezeigt haben, nicht, wenn man neben dem Grossack'schen Koeffizienten eine weitere der drei Variablen  $r$ ,  $s_i$  oder  $s_{i+1}$  kennt.

Bei Verwendung von  $K_{Gr}$  als dynamischem Konzentrationsmaß muß man sich daher bewußt sein, daß die Komponente  $\frac{s_{i+1}}{s_i} = \sqrt{\frac{K_H^{i+1} - \frac{1}{n}}{K_H^i - \frac{1}{n}}}$ , die die Ver-

änderung der Konzentration im Verhältnis der Streuungen erfaßt, und die Komponente  $r$ , die die "Straffheit" des Zusammenhangs zwischen den Rangwertreihen der Merkmalsträger für die Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_{i+1}$ ,<sup>1)</sup> mißt, sich überlagern können. Ihr Einfluß kann sich dann so gestalten, daß  $r$  und

$\frac{s_{i+1}}{s_i}$  sich in ihrer Wirkung ausgleichen und  $K_{Gr}$  konstant bleibt. Die Berechnung des Wertes von  $K_{Gr}$

---

<sup>1)</sup> Bruckmann, A., a.a.O., S. 204

für einen Konzentrationsprozess, der mit Hilfe von  $K_{Gr}$  quantitativ dargestellt werden soll, ist damit zumindest durch die Betrachtung der zugehörigen Werte für  $r$ ,  $s_i$  und  $s_{i+1}$  zu ergänzen; Grossack selbst geht in dieser Weise vor.<sup>1)</sup>

Der Informationsgewinn, den man so durch die zusätzliche Angabe dieser drei Größen erzielt, läßt sich auch besonders deutlich mit Hilfe des in 1.1 entwickelten Modells veranschaulichen.

Die Vektoren

$$v(t_1) = (x_{11}, \dots, x_{1n}) \text{ und}$$

$$v(t_2) = (x_{21}, \dots, x_{2n}) \quad ^2) \text{ charakterisieren in}$$

oben angegebener Weise die Lage des Konzentrationspunktes zu  $t_1$  und  $t_2$ .  $\bar{v} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  sei der auf S. 11 angegebene Vektor mit  $n$  gleichen Komponenten  $\frac{1}{n}$ , der im  $R^n$  die Lage des Punktes beschreibt, der den Zustand der "vollständigen Nichtkonzentration" repräsentiert. Dann ist der Betrag des Differenzvektors  $v(t_1) - \bar{v}$ , bzw. des Differenzvektors  $v(t_2) - \bar{v}$  definiert als

<sup>1)</sup> Grossack, J.M., a.a.O. S. 305 - 307

<sup>2)</sup> Zur Vereinfachung der Schreibweise wurde  $i = 1$  und  $i + 1 = 2$  gesetzt; es handelt sich aber nicht notwendigerweise um zwei aufeinanderfolgende Zeilen der Matrix  $x$ . Diese Umbenennung stellt somit keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit dar.

$$|\varphi(t_1) - \bar{c}| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{1j} - \frac{1}{n})^2} \quad \text{bzw.}$$

$$|\varphi(t_2) - \bar{c}| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{2j} - \frac{1}{n})^2} \quad .^1)$$

Der Betrag des ersten Differenzvektors gibt die Entfernung zwischen dem Konzentrationspunkt zu  $t_1$  und dem "Nichtkonzentrationspunkt" an; entsprechend gibt der zweite Differenzvektor diese Entfernung zum Zeitpunkt  $t_2$  an.

Da  $s_1$  definiert ist als

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_j (x_{1j} - \frac{1}{n})^2}$$

erkennt man unmittelbar

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1}} |\varphi(t_1) - \bar{c}| \quad .$$

Für  $s_2$  gilt das Entsprechende

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{n-1}} |\varphi(t_2) - \bar{c}|$$

Damit hat sich gezeigt, daß  $s_i$  jeweils proportional zur Entfernung des Konzentrationspunktes vom "Nichtkonzentrationspunkt" zur Zeit  $t_i$  mit dem Proportio-

nalitätsfaktor  $\sqrt{\frac{1}{n-1}}$  ist. Daraus folgt, daß der Quotient  $\frac{s_{i+1}}{s_i}$ , welcher die eine Komponente des Grossack'schen Koeffizienten  $K_{Gr}$  bildet, gleich dem Verhältnis der Entfernungen der jeweiligen Konzen-

---

<sup>1)</sup> Fischer-Lexikon Mathematik 1, Frankfurt a.Main 1964 S. 293

trationspunkte zu  $t_i$  bzw.  $t_{i+1}$ ; vom "Nichtkonzentrationspunkt" ist. Zur Bedeutung dieser Entfernungen folgen im dritten und vierten Kapitel dieser Arbeit weitere Ausführungen.

Der Cosinus des Winkels zwischen den beiden o.a. Differenzvektoren  $\varphi(t_1) - \bar{\varphi}$  und  $\varphi(t_2) - \bar{\varphi}$  ist definiert als Quotient aus dem skalaren (inneren) Produkt der beiden Differenzvektoren und dem Produkt der Beträge<sup>1)</sup>:

$$\cos \varphi = \frac{(\varphi(t_1) - \bar{\varphi})(\varphi(t_2) - \bar{\varphi})}{|\varphi(t_1) - \bar{\varphi}| \cdot |\varphi(t_2) - \bar{\varphi}|}.$$

In Komponentenschreibweise erhält man dafür:

$$\cos \varphi = \frac{\sum_j (x_{1j} - \frac{1}{n}) \cdot (x_{2j} - \frac{1}{n})}{\sqrt{\sum_j (x_{1j} - \frac{1}{n})^2} \cdot \sqrt{\sum_j (x_{2j} - \frac{1}{n})^2}}$$

Die rechte Seite obiger Gleichung ist aber zugleich auch die Darstellung von  $r$ .

Die zweite Komponente des Grossack'schen Koeffizienten  $K_{Gr}$ , nämlich  $r$ , ist damit gleich dem Cosinus zwischen den Differenzvektoren  $\varphi(t_1) - \bar{\varphi}$  und  $\varphi(t_2) - \bar{\varphi}$ . Diese Betrachtungsweise wird ebenfalls im vierten Kapitel dieser Arbeit wieder aufgegriffen.

---

<sup>1)</sup> Grottemeyer, K.P., Analytische Geometrie, Berlin 1962, S. 17

In den vorangegangenen Ausführungen galten die eingangs zu diesem Abschnitt auf Seite 41 gemachten Einschränkungen bezüglich  $n$ . Problematisch wird die Darstellung eines Konzentrationsprozesses mit Hilfe von  $K_{Gr}$  vor allem aber auch dann, wenn im Zeitablauf zwischen  $t_i$  und  $t_{i+1}$  sich die Anzahl der Merkmalsträger so geändert hat, daß diese Veränderung nicht vernachlässigt werden kann und deshalb in die Analyse mit einbezogen werden muß; in diesem Fall, der in der Realität meist dann vorliegen wird, wenn der zeitliche Abstand zwischen  $t_i$  und  $t_{i+1}$  groß genug ist, kann also nicht mehr  $n(t_i) = n(t_{i+1}) = n$  gesetzt werden.

Zur Lösung dieses Problems schlägt Grossack vor, für die Berechnungen eine Anzahl  $n'$  von Merkmalsträgern der Betrachtung zugrunde zu legen, die wie folgt gegeben ist:  $n' = \max [n(t_i), n(t_{i+1})]$ . Dabei wird so verfahren, daß bei Zugängen der Anteil des zu  $t_i$  noch nicht vorhandenen Merkmalsträgers mit Null in die Berechnungen eingeht; analog wird bei Abgängen der Anteil des zu  $t_{i+1}$  nicht mehr vorhandenen Merkmalsträgers gleich Null gesetzt. Bei Fusionen wird so verfahren, daß der Merkmalsträger mit dem größten Anteil als Vorgänger des durch Fusion entstandenen Merkmalsträgers in die Analyse eingeht; die Merkmalsbeträge der anderen in die Fusion einbezogenen Elemente wird für  $t_{i+1}$  mit Null angesetzt. Entsprechend wird bei Aufteilungen verfahren.

Über die Auswirkungen, die die Befolgung dieser Festlegungen bei der Anwendung von  $K_{Gr}$  zur Beurteilung von Konzentrationsprozessen haben, liegen wohl noch

keine Erfahrungen vor: "Welche vielleicht unerwünschte Konsequenzen diese Verfahrensweisen mit sich bringen, ist allerdings nicht ohneweiteres übersehbar."<sup>1)</sup>

Im Abschnitt 1.3 ist die Bedeutung, die  $n = n(t)$  als zeitlich variabler Größe in einem Konzentrationsprozeß zukommt, ausführlich dargestellt worden. Bei Grossack's Koeffizienten  $K_{Gr}$  wird diese Entwicklungskomponente, wie die zuletzt angestellten Überlegungen gezeigt haben, gewissermaßen nur im Nachhinein berücksichtigt, denn Grossack's Ziel ist primär, die quantitative Darstellung der "Monopolmacht" durch die Betrachtung der Korrelation zwischen den  $x_{ij}$  und den  $x_{i+1',j}$ ; im Vordergrund steht also die im Abschnitt 1.3 als erste betrachtete Entwicklungskomponente.

H a r t und P r a i s stellen demgegenüber  $n = n(t)$  als zeitabhängige Variable mit an den Anfang ihrer Überlegungen: "Zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten kann sich die Konzentration verändern, 1) weil neue Firmen (= Merkmalsträger) auftreten 2) weil alte Firmen liquidiert werden (bzw. in andere Firmen eingegliedert werden) 3) weil sich die Größenklassenverteilung unter den Firmen verändert, die zu beiden Zeitpunkten bestanden."<sup>2)</sup>

Da also Hart und Prais Veränderungen von  $n$  von vornherein in die Analyse mit einbeziehen und in-

---

<sup>1)</sup> Kellner, H. und Schaich, E., a.a.O., S. 39

<sup>2)</sup> Hart, P.E. und Prais, S.J., a.a.O., S. 165

sofern gegenüber Grossack dieser Entwicklungskomponente eine viel größere Bedeutung zugemessen wird, soll sich der nächste Abschnitt mit dem Verfahren dieser Autoren zur Erfassung eines Konzentrationsprozesses befassen.

### 2.1.3 Die Analyse von Konzentrationsprozessen nach

#### H a r t      u n d      P r a i s

Die Analyse von Hart und Prais beschäftigt sich mit der Entwicklung des Marktwertes (market valuation) von Unternehmen auf dem Bergwerkssektor, im produzierenden und handeltreibenden Gewerbe. Dabei wird der Marktwert als Produkt aus dem Verkaufspreis jedes Aktientyps und der jeweiligen Gesamtzahl von Aktien berechnet. Hart und Prais nennen eine Reihe von anderen statistischen Merkmalen, die für Konzentrationsuntersuchungen u.U. besser geeignet wären, begründen aber die Entscheidung für den Marktwert schließlich damit, daß das für die Berechnung notwendige Zahlenmaterial vergleichsweise am besten zu erhalten war und daß der Marktwert darüber Auskunft gebe, wie die Ertragskraft des Unternehmens eingeschätzt werde und damit als bestes Kriterium zur Beurteilung der Größe anzusehen sei. <sup>1)</sup>

Die beiden Autoren untersuchen die Größenklassenverteilung und ihre Veränderung für die o.a. Unternehmen in fünf Stufen für die Jahre 1885/96, 1896/1907

---

<sup>1)</sup> Hart, P.E. und Prais, S.J., a.a.O., S. 154 f. In diesem Zusammenhang ist zu bedenken, daß die Schlußfolgerungen, die die beiden Autoren als Ergebnis Ihrer Analyse ziehen, im Hinblick auf den Marktwert als Untersuchungsobjekt zu sehen sind und daher eine Verallgemeinerung nicht ohne weiteres möglich ist.

1907/1924, 1924/1930, 1939/1950. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Aufbereitung des ihnen vorliegenden Zahlenmaterials sind Übergangsmatrizen (vgl. Abb. 8: 61 ff); das Element in der k-ten Zeile und der l-ten Spalte gibt dabei die Anzahl<sup>1)</sup> der Unternehmen an, die im betrachteten Zeitraum von der Größenklasse l in die Größenklasse k gewechselt sind. Die Veränderung in der Anzahl n der Merkmalsträger zwischen Basis- und Endjahr wird bezüglich der Abgänge und der Zugänge berücksichtigt; denn es wird angegeben, wie groß die Anzahl der ausgeschiedenen Merkmalsträger im betrachteten Zeitraum war ("deaths") und deren Größenklassenverteilung im Basisjahr dargestellt; ebenso wird angegeben, wie groß die Anzahl der neu hinzugekommenen Merkmalsträger für den betrachteten Zeitraum war ("births") und wie für die Abgänge wird für die Zugänge die Größenklassenverteilung für das Endjahr ausgewiesen.<sup>2)</sup>

Die eigentliche komparativ-statische Analyse von Hart und Prais baut auf einem recht einfachen, praktischen Ansatz auf: als Indikator zur Beurteilung des Konzentrationsprozesses verwenden die beiden Autoren ausschließlich die Varianz; für die Analyse nutzen sie dabei die Regeln für die Va-

---

<sup>1)</sup> Da diese Anzahl absolut angegeben wird, handelt es sich also bei dem Ansatz der beiden Autoren um ein Verfahren zur Messung der Veränderung der absoluten Konzentration.

<sup>2)</sup> Hart, P.E. und Prais, S.J., a.a.O., S.161-165

rianzzerlegung aus: "Wenn zwei Gesamtheiten mit durchschnittlichem Merkmalsbetrag  $\bar{x}_1$  und  $\bar{x}_2$  und den Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  vereinigt werden, so gilt für die Varianz in der vereinigten Gesamtheit:

$$\sigma^2 = w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_2^2 + w_1 w_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$$

wobei  $w_1$  und  $w_2$  die Anteile der Gruppen 1 und 2 an der vereinigten Gesamtheit sind." ( $w_1 + w_2 = 1$ )<sup>1)</sup>

Als vereinigte Gesamtheit ist dabei das Kollektiv von Merkmalsträgern im Basis- bzw. im Endjahr anzusehen (bei Hart und Prais in Tabelle 8 - siehe S.66 als "total at first year" bezeichnet). Als Untergruppen im Basisjahr sind die Teilmenge der Abgänger und die Teilmenge derjenigen Merkmalsträger, die die betrachtete Periode "überleben" zu verstehen. Bei beiden Teilmengen interessiert die Verteilung der Merkmalsbeträge auf die Merkmalsträger im Basisjahr. Analog wird für das Kollektiv im Endjahr verfahren: Teilmengen sind die "Überlebenden" und die Zugänge; betrachtet wird jetzt die Verteilung des Merkmalsbetrags in den beiden Teilgesamtheiten zum Ende der analysierten Periode, also im Endjahr.

Indem Hart und Prais die Entwicklung des betrachteten Konzentrationsprozesses in der eben geschilderten Weise aufgliedern, versuchen sie, die Bedeutung

---

<sup>1)</sup> Hart, P.E. und Prais, S.J., a.a.O., S. 165

der in die Betrachtung einbezogenen Entwicklungs-  
komponenten herauszuarbeiten und den Einfluß jeder  
dieser Entwicklungskomponenten für sich isoliert  
dargestellen. Sie machen sich dabei die Aussagen  
zunutze, die sich mit Hilfe der oben dargestellten  
Form der Varianzzerlegung machen lassen; bekannt-  
lich gilt, wenn man die Varianz in einer Gesamtheit  
gemäß der obigen Formel aufgliedert:

- a) für  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  und  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$  haben die Teilge-  
samtheiten gleiche Varianz wie die Grundge-  
samtheit
- b) für  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  und  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$  ist die Va-  
rianz  $\sigma^2$  in der Grundgesamtheit ein gewogener  
Durchschnitt aus den Varianzen der Teilgesamt-  
heiten und
- c) für  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  aber  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$  ist die Va-  
rianz in der vereinigten Gesamtheit stets größer  
als die Varianz in den Teilgesamtheiten.

Das Urdatenmaterial, das Hart und Prais zur Verfü-  
gung stand, und das zunächst in Form von Übergangs-  
matrizen aufbereitet wurde, verdichten die beiden  
Autoren nochmals so, daß sie die Analyse des Konzen-  
trationsprozesses mit Hilfe der Regeln für die Va-  
rianzzerlegung durchführen können: Sie geben dabei  
für die fünf von Ihnen betrachteten Perioden jeweils  
die Größen  $n$  (in der o.a. Tabelle 8 mit  $N$  bezeichnet),  
 $\bar{x}$  und  $\sigma^2$  (die beiden letzten Größen in  $^2\log$ ) an.  
Die erste Zeile dieser Tabelle (Tabelle 8 S. 66),  
die Aussagen über die Verteilung der Merkmalsbeträge  
auf die Merkmalsträger im Basisjahr macht, wird





Changes in the Sizes of Business Units, 1907 - 24 \*)

| Classes    | A B C D E F G H K L M N O P Q R S T |   |   |    |     |     |     |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   | Total |
|------------|-------------------------------------|---|---|----|-----|-----|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
|            | Births                              |   |   |    |     |     |     |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1924  |
| A          | -                                   | 1 | 1 | -  | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 2     |
| B          | -                                   | 1 | - | 1  | 1   | 1   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 3     |
| C          | -                                   | 1 | - | 1  | 3   | 5   | 3   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 8     |
| D          | -                                   | - | - | 2  | 14  | 16  | 3   | 2  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 11    |
| E          | -                                   | - | - | 2  | 9   | 33  | 30  | 1  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 35    |
| F          | -                                   | - | - | 2  | 2   | 13  | 34  | 2  | 1  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 79    |
| G          | -                                   | - | - | 1  | 3   | 3   | 14  | 36 | 4  | 1  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 73    |
| H          | -                                   | - | - | 1  | 2   | 2   | 20  | 3  | 4  | 1  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 71    |
| K          | -                                   | - | - | 1  | 3   | 3   | 13  | 4  | 1  | 5  | 2  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 65    |
| L          | -                                   | - | - | 1  | 1   | 1   | 5   | 3  | 1  | 3  | 5  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 40    |
| M          | -                                   | - | - | -  | 1   | 1   | 8   | 6  | 6  | 3  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 27    |
| N          | -                                   | - | - | -  | -   | -   | 1   | 4  | 2  | 2  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 18    |
| O          | -                                   | - | - | -  | -   | -   | 1   | 5  | 1  | 6  | 4  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 15    |
| P          | -                                   | - | - | -  | -   | -   | 2   | 3  | 2  | 3  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 5     |
| Q          | -                                   | - | - | -  | -   | -   | -   | 1  | -  | 1  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 3     |
| R          | -                                   | - | - | -  | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 1     |
| S          | -                                   | - | - | -  | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | -     |
| T          | -                                   | - | - | -  | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | -     |
| Total      | -                                   | 1 | 2 | 4  | 36  | 77  | 96  | 94 | 65 | 37 | 28 | 9 | 5 | 1 | 1 | - | - | - | - | - | 456   |
| Deaths     | -                                   | 7 | 5 | 15 | 28  | 23  | 16  | 13 | 5  | 1  | -  | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 113   |
| Total 1907 | -                                   | 9 | 9 | 51 | 105 | 119 | 110 | 78 | 42 | 29 | 9  | 5 | 1 | 1 | - | - | - | - | - | - | 569   |
|            |                                     |   |   |    |     |     |     |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 270   |
|            |                                     |   |   |    |     |     |     |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 726   |

Changes in the Sizes of Business Units, 1924 - 39 \*)

| Classes    | A B C D E F G H K L M N O P Q R S T |   |    |    |    |     |     |     |     |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   | Total Births | Total |
|------------|-------------------------------------|---|----|----|----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|--------------|-------|
|            |                                     |   |    |    |    |     |     |     |     |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   | 1939         | 1939  |
| A          | -                                   | - | -  | 1  | 3  | 1   | 2   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 7            | 8     |
| B          | -                                   | - | -  | 1  | 4  | 1   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 6            | 7     |
| C          | -                                   | - | -  | 1  | 4  | 2   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 3            | 4     |
| D          | -                                   | - | -  | 1  | 6  | 4   | 5   | 1   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 16           | 21    |
| E          | -                                   | 1 | 3  | 1  | 8  | 7   | 3   | 3   | 1   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 26           | 34    |
| F          | -                                   | - | -  | 2  | 13 | 21  | 19  | 11  | 2   | 1  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 59           | 69    |
| G          | -                                   | - | -  | 1  | 4  | 24  | 21  | 12  | 5   | 3  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 32           | 100   |
| H          | 1                                   | - | -  | 1  | 2  | 3   | 9   | 21  | 9   | 3  | 1  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 70           | 135   |
| I          | -                                   | - | -  | -  | 1  | 5   | 4   | 10  | 25  | 13 | 5  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 68           | 157   |
| K          | -                                   | - | -  | -  | 2  | 2   | 4   | 9   | 31  | 15 | 3  | 6  | 1  | - | - | - | - | - | - | 89           | 97    |
| L          | -                                   | - | -  | -  | 1  | 2   | 4   | 10  | 9   | 11 | 14 | 4  | 1  | - | - | - | - | - | - | 51           | 94    |
| M          | -                                   | - | -  | -  | 2  | 4   | 1   | 9   | 15  | 13 | 8  | 9  | 9  | 1 | - | - | - | - | - | 27           | 37    |
| N          | -                                   | - | -  | -  | 1  | 4   | 1   | 9   | 3   | 2  | 4  | 8  | 9  | 2 | - | - | - | - | - | 14           | 16    |
| O          | -                                   | - | -  | -  | -  | -   | 1   | 1   | 1   | 2  | 3  | 4  | 9  | 2 | - | - | - | - | - | 23           | 37    |
| P          | -                                   | - | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -  | 2  | 4  | 9  | 2 | - | - | - | - | - | 12           | 4     |
| Q          | -                                   | - | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -  | 1  | 1  | 4  | 5 | 2 | - | - | - | - | 4            | 2     |
| R          | -                                   | - | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | 1  | 1 | 1 | 2 | - | - | - | 1            | 3     |
| S          | -                                   | - | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 2            | 4     |
| T          | -                                   | - | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | - | - | 1            | 1     |
| Total      | 1                                   | 1 | 3  | 6  | 44 | 74  | 75  | 92  | 78  | 56 | 31 | 32 | 15 | 4 | 3 | 1 | - | - | - | 516          | 321   |
| Deaths     | 1                                   | 5 | 7  | 11 | 20 | 39  | 44  | 32  | 22  | 10 | 7  | 3  | 1  | 1 | - | - | - | - | - | 203          | -     |
| Total 1924 | 2                                   | 6 | 10 | 17 | 64 | 113 | 119 | 124 | 100 | 66 | 38 | 35 | 16 | 5 | 3 | 1 | - | - | - | 719          | -     |

Changes in the Sizes of Business, 1939 - 50\*)

| Classes       |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |    |    |    |    |   |   |   |   |        | Total | Total |
|---------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|--------|-------|-------|
|               | A  | B  | C  | D  | E   | F   | G   | H   | K   | L   | M  | N  | O  | P  | Q | R | S | T | Births | 1950  |       |
| A             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | -      | -     |       |
| B             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | -      | -     |       |
| C             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | -      | -     |       |
| D             | 6  | 3  | 9  | 9  | 3   | 1   | 1   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 4      | 3     |       |
| E             | 3  | 3  | 6  | 9  | 18  | 9   | 3   | -   | -   | -   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 21     | 68    |       |
| F             | 3  | 3  | 10 | 21 | 42  | 46  | 25  | 1   | 1   | 3   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 52     | 204   |       |
| G             | 3  | 3  | 9  | 12 | 33  | 61  | 124 | 69  | 3   | 8   | 1  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 125    | 322   |       |
| H             | -  | -  | -  | 3  | 31  | 15  | 61  | 114 | 73  | 3   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 160    | 465   |       |
| K             | 3  | 3  | -  | 3  | -   | 1   | 12  | 10  | 26  | 8   | -  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 145    | 423   |       |
| L             | -  | -  | -  | -  | -   | 61  | 39  | 39  | 86  | 49  | 1  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 60     | 249   |       |
| M             | -  | -  | -  | -  | -   | 1   | 6   | 26  | 73  | 68  | 35 | -  | -  | -  | - | - | - | - | 25     | 184   |       |
| N             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | 26  | 7   | 1  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 7      | 76    |       |
| O             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | 49  | 48  | 3  | -  | -  | -  | - | - | - | - | 2      | 40    |       |
| P             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | 68  | 35  | 19 | -  | -  | -  | - | - | - | - | 1      | 22    |       |
| Q             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | 1   | 20  | 8  | -  | -  | -  | - | - | - | - | -      | -     |       |
| R             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | 3   | 1   | 2  | -  | -  | -  | - | - | - | - | -      | -     |       |
| S             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | 13  | 17  | 15 | -  | -  | -  | - | - | - | - | -      | -     |       |
| T             | -  | -  | -  | -  | -   | -   | -   | -   | 2   | 3   | 1  | -  | -  | -  | - | - | - | - | -      | -     |       |
| Total         | 15 | 12 | 34 | 54 | 127 | 204 | 296 | 236 | 207 | 141 | 82 | 42 | 29 | 15 | 4 | 3 | - | 1 | 1502   | 601   |       |
| Deaths        | 4  | 8  | 14 | 13 | 31  | 35  | 40  | 40  | 13  | 8   | 2  | 1  | 1  | -  | - | - | - | - | 210    | 2103  |       |
| Total<br>1939 | 19 | 20 | 48 | 67 | 158 | 239 | 336 | 276 | 220 | 149 | 84 | 43 | 30 | 15 | 4 | 3 | - | 1 | 1712   | -     |       |

TABLE 8

Summary of Changes in the Numbers, Means and Variances of Quoted Companies in the United Kingdom, 1885 - 1950 \*)

|                             | Units: Log |           |            |           |           |            |           |           |            |           |           |            |           |           |            |
|-----------------------------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|
|                             | 1885-1896  |           |            | 1896-1907 |           |            | 1907-1924 |           |            | 1924-1939 |           |            | 1939-1950 |           |            |
|                             | N          | $\bar{x}$ | $\sigma^2$ | N         | $\bar{x}$ | $\sigma^2$ | N         | $\bar{x}$ | $\sigma^2$ | N         | $\bar{x}$ | $\sigma^2$ | N         | $\bar{x}$ | $\sigma^2$ |
| 1. Total at first year      | 60         | -0,37     | 4,17       | 250       | 0,56      | 3,85       | 569       | 0,57      | 3,79       | 719       | 0,89      | 5,61       | 1712      | 0,53      | 6,01       |
| 2. Deaths in period         | 15         | -2,53     | 2,92       | 50        | -1,02     | 4,22       | 113       | -0,35     | 3,18       | 203       | -0,06     | 4,73       | 210       | -0,70     | 4,75       |
| 3. Survivors at first year  | 45         | 0,36      | 2,50       | 200       | 0,96      | 2,97       | 456       | 0,80      | 3,68       | 516       | 1,26      | 5,45       | 1502      | 0,71      | 5,95       |
| 4. Survivors at second year | 45         | 0,98      | 4,64       | 200       | 1,13      | 3,85       | 456       | 0,96      | 6,16       | 516       | 1,56      | 7,66       | 1502      | 1,68      | 4,66       |
| 5. Births in a period       | 205        | 0,47      | 3,63       | 371       | 0,28      | 3,55       | 270       | 0,77      | 4,54       | 321       | 2,12      | 4,62       | 601       | 1,11      | 2,34       |
| 6. Total at second year     | 250        | 0,56      | 3,85       | 571       | 0,58      | 3,82       | 726       | 0,89      | 5,56       | 337       | 1,77      | 6,57       | 2103      | 1,52      | 4,07       |

aus der jeweils letzten Zeile der Übergangsmatrizen gewonnen.

Die zweite Zeile in Tabelle 8 charakterisiert die Verteilung der Merkmalsbeträge der Teilgesamtheit der Abgänger und ist als Zusammenfassung der jeweils vorletzten Zeile in den Übergangsmatrizen anzusehen. Die dritte Zeile in Tabelle 8 schließlich gibt Auskunft über die Situation in der Teilgesamtheit der im Basis- und Endjahr vorhandenen Merkmalsträger und wird aus der drittletzten Zeile der Übergangsmatrizen gewonnen. Zeile 1 bis 3 sind in der oben erwähnten Weise im Zusammenhang zu sehen.

In Zeile 4 von Tabelle 8 wird  $n$ ,  $\bar{x}$  und  $\sigma^2$  für die "Überlebenden" der jeweiligen Periode angegeben; diese Werte werden aus den drittletzten Spalten der Übergangsmatrizen gewonnen. Zeile 5 in Tabelle 8 gibt die Anzahl der Zugänge, sowie Mittelwert und Varianz der Verteilung in dieser Teilgesamtheit im Endjahr an - ermittelt aus der vorletzten Spalte der Übergangsmatrizen - und schließlich findet man in der letzten Zeile von Tabelle 8  $n$ ,  $\bar{x}$  und  $\sigma^2$  für die letzten Spalten der Übergangsmatrizen, d.h. also für die Verteilung des Gesamtmerkmalsbetrages zum Endzeitpunkt der betrachteten Perioden.

Tabelle 8 als Aufbereitung der Informationen, die man auf Grund der Übergangsmatrizen erhält, bietet Hart und Prais die Grundlage für den von ihnen analysierten Konzentrationsprozeß folgendermaßen zu schließen: <sup>1)</sup>

- a) Die Merkmalsträger, die in einer Periode ausscheiden, sind dadurch charakterisiert, daß ihr durchschnittlicher Merkmalsbetrag  $\bar{x}$  kleiner ist als der durchschnittliche Merkmalsbetrag in der Gesamtheit zu Beginn der Periode; gleiches gilt für die Varianz. Man kann deshalb annehmen, daß vorwiegend die kleineren Unternehmen zu den Abgängern zählen.
- b) Die Merkmalsträger, die in einer Periode neu hinzukommen, sind dadurch charakterisiert, daß ihr durchschnittlicher Merkmalsbetrag kleiner ist als der durchschnittliche Merkmalsbetrag der Gesamtheit am Ende der Periode; gleiches gilt für die Varianz. Dennoch ist festzustellen, daß Zugänge die Varianz - und damit im Sinne der beiden Autoren die Konzentration - in der Grundgesamtheit für das Ende der Periode fast stets verkleinern. Diese Tatsache wird von Hart und

---

<sup>1)</sup> Hart, P.E. und Prais, S.J., a.a.O., S. 175

Prais darauf zurückgeführt, daß den neu hinzukommenden Merkmalsträgern zum Teil wesentlich größere Merkmalsbeträge zuzuordnen sind als dem Durchschnitt der Merkmalsträger, die sich über die ganze Periode in der Gesamtheit befanden; unter diesen Merkmalsträgern befindet sich ein Teil, dem wesentlich kleinere Merkmalsbeträge zuzuordnen sind, worauf die größere Varianz in der Teilgesamtheit der "survivors at second year" hinweist.

- c) Als bemerkenswertestes Ergebnis ihrer Analyse sehen Hart und Prais die Aussage an, daß trotz der großen Anzahl von Zu- und Abgängen die Konzentration vor allem durch die Veränderung in den Merkmalsbeträgen der Merkmalsträger beeinflusst wird, die sowohl zu Beginn als auch zu Ende der betrachteten Periode vorhanden waren.
- d) Als letztes Ergebnis halten die Autoren fest, daß für Beobachtungen über kurze Zeiträume - als solche sehen sie ihre Perioden an - die hauptsächlichsten Veränderungen sich in den Varianzen niederschlagen; für den ganzen Zeitraum (also 1885 bis 1950) genüge es aber nicht, die unterschiedliche Konzentration an Hand der Veränderung der Varianzen zu beurteilen; es sei zu beachten, daß in der Veränderung höherer Momente, wie Schiefe und Kurtosis - die kurzfristig als Konstante anzusehen seien - eine maßgebliche Komponente des Konzentrationsprozesses ihren Niederschlag findet.

Schließlich beschäftigen sich Hart und Prais noch ausführlich mit der Verminderung von  $n$  durch Vereinigung von Merkmalsträgern und versuchen, den Einfluß dieser Entwicklungskomponente auf einen Konzentrationsprozeß mit dem von ihnen entwickelten Instrumentarium darzustellen. Sie kommen zu dem Ergebnis, daß sich vorwiegend solche Merkmalsträger zusammenschlossen, deren Merkmalsbetrag im Durchschnitt bereits vor der Vereinigung größer war als der durchschnittliche Merkmalsbetrag der Gesamtheit; im allgemeinen nahm durch diese Vereinigungen der durchschnittliche Merkmalsbetrag  $\bar{x}$  zu, die Varianz jedoch ab, sodaß der Gesamtmerkmalsbetrag nach Durchführung der Vereinigungen zwar auf weniger Merkmalsträger, dafür aber gleichmäßiger unter den noch vorhandenen Merkmalsträgern verteilt war. - Dieses Ergebnis ist offensichtlich mit Vorsicht zu interpretieren, da in die Analyse kein Ansatz bezüglich des Parameters  $n_0$  - der wünschbaren Anzahl von Merkmalsträgern - eingeht.

Mit Hilfe der Gleichung zur Varianzzerlegung (siehe S. 59 ) beziehen Hart und Prais die Ergebnisse ihrer Analyse hinsichtlich der Vereinigungen von Merkmals-trägern in die Gesamtanalyse ein, indem sie folgendermaßen verfahren: Sie trennen das Kollektiv der Merkmalsträger für das Basisjahr in eine Teilgesamtheit, die die Merkmalsträger umfaßt, bei denen in der betrachteten Periode Zusammenschlüsse vorgenommen wurden, und die Teilgesamtheit der übrigen Merkmalsträger, bei denen keine Vereinigungen stattfanden. Die Verteilungen der Merkmalsbeträge auf die Merkmalsträger werden vor erfolgter Fusionierung getrennt für jede der beiden Teilgesamtheiten erfaßt.

Zur Untersuchung der Bedeutung von Zusammenlegungen ersetzen Hart und Prais (in den in der eben dargestellten Weise erfaßten Verteilungen) die Verteilung von Merkmalsbeträgen auf Merkmalsträger in der Teilgesamtheit der fusionierenden Unternehmen vor erfolgtem Zusammenschluß durch die Verteilung nach erfolgtem Zusammenschluß. Dieses veränderte Kollektiv vergleichen sie nun mit dem Kollektiv, wie es im Basisjahr tatsächlich vorhanden war.

Als Ergebnis ihrer Berechnungen erhielten sie eine Vergrößerung der Varianz in der vereinigten Gesamtheit (nach erfolgten Fusionen); der Betrag, um den sich die Varianz auf Grund von Vereinigung von Merkmalsträgern vergrößert, ist aber sehr klein im Vergleich zu dem Betrag, um den sich die Varianz auf Grund der Entwicklung der Merkmalsbeträge ändert; Hart und Prais messen daher der Entwicklung der Merkmalsbeträge eine größere Bedeutung in bezug auf Konzentrationsvorgänge zu als dem Zusammenschluß von Merkmalsträgern.

Die beiden Autoren schließen ihre Ausführungen mit einer Zusammenfassung, der als Wichtigstes zwei Ergebnisse zu entnehmen sind:

- 1) Die Bestätigung von Gibrat's "law of proportionate growth" für die Merkmalsträger, die zumindest während des Großteils des gesamten untersuchten Zeitraums vorhanden waren.
- 2) Der Zug zur Konzentration im Sinn des oben angeführten Gesetzes wird vor allem durch den Zugang

neuer Merkmalsträger verhindert.

Wie sind nun die Vorschläge der beiden englischen Autoren zur quantitativen Darstellung von Konzentrationsprozessen zu beurteilen?

Besonders interessant erscheint die Art und Weise, wie es gelingt, die Anzahl  $n$  und ihre Veränderung durch Zu- und Abgänge sowie Fusionen <sup>1)</sup> in eine Konzentrationsanalyse mit Hilfe der Varianzzerlegung einzubeziehen. Aufschlußreich ist auch, wie die komparativ-statische Analyse durch Untergliederung bzw. mehrfache Anwendung in Richtung auf eine wirklich dynamische Konzentrationsmessung hin verfeinert wird. Dagegen scheinen im wesentlichen zwei Einwände gegen ein derartiges Vorgehen zur Analyse von Konzentrationsprozessen gerechtfertigt: der erste Einwand richtet sich gegen den mehr oder weniger ausschließlichen Ansatz der Varianz als Konzentrationsmaß, der zweite gegen die implizit vorgenommene Gleichsetzung von  $n$  mit  $n_0$ , was die Zusammenhänge zwischen absoluter und relativer Konzentration verwischt.

Zunächst ist zwar zu sagen, daß neben der Varianz auch der Mittelwert für die Analyse betrachtet wird; da aber die Berechnungen auf den anonymen Angaben

---

<sup>1)</sup> Auf Aufgliederungen im Sinn von Abschnitt 1.3 gehen Hart und Prais nicht ein; es scheint allerdings möglich, dieses Problem analog zum Problem der Fusionen zu behandeln.

der Übergangsmatrizen <sup>1)</sup> beruhen, geht die Information verloren, die man durch den Korrelationskoeffizienten  $r$  in Grossack's  $K_{Gr}$  erhält. Die Aussagen der beiden Autoren besonders bezüglich des "law of proportionate growth" beruhen daher auf dem Ansatz, daß  $r$  nahe bei 1 für alle in die Betrachtungen eingehenden Merkmalsträger ist. Diese Annahme wird zwar zum Teil dadurch bestätigt, daß in den Übergangsmatrizen die Elemente nahe der Hauptdiagonalen am stärksten besetzt sind, dennoch scheint aber der Zusammenhang zwischen den Verteilungen in Basis- und Endjahr, den man mit dem Korrelationskoeffizienten  $r$  erfassen kann, nicht über alle Perioden gleich zu sein.

Der zweite und gewichtigste Einwand gegen die Analyse wurde an der entsprechenden Stelle schon kurz erwähnt: Es handelt sich dabei um die Feststellung, daß die Fusion von Merkmalsträgern die Konzentration zwar vergrößere, der Betrag aber so klein sei, daß die gesonderte Betrachtung bei einer dynamischen Analyse außer Betracht bleiben könne. Diese Feststellung ist sicher darauf zurückzuführen, daß die Anzahl der sich zusammenschließenden Merkmalsträger im Vergleich zur Gesamtzahl  $n$  aller in die Analyse einbezogenen Merkmalsträger klein war. Der Ein-

---

<sup>1)</sup> Diese Anonymität wird von den Autoren als Nachteil angesehen, aber der Praktikabilität der quantitativen Darstellung halber in Kauf genommen.

fluß der Zusammenschlüsse hätte sich in der Varianz sicher deutlicher niedergeschlagen, wenn ein Ansatz ähnlich Münzner's Überlegungen erfolgt wäre, d.h. ein Parameter  $n_0$  berücksichtigt worden wäre.

## 2.2 Die Veränderung der relativen Konzentration und und Verfahren zur Messung dieser Veränderung.

Um Aussagen über die Art der Veränderung der relativen Konzentration im Zeitablauf zu machen, ist es naheliegend, ähnlich wie unter 2.1 bei der Erfassung der Veränderung der absoluten Konzentration zu verfahren und Maßzahlen, die die relative Konzentration für die beiden Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , beurteilen, einander gegenüberzustellen. Es wird dabei häufig so vorgegangen, daß die relative Konzentration zu einem (Basis-) Zeitpunkt  $t_i$  mit Hilfe einer Lorenzkurve dargestellt wird; für dieselbe Gesamtheit wird die zugehörige Lorenzkurve zu einem weiteren Zeitpunkt  $t_{i+1}$  ermittelt. Beide Lorenzkurven werden dann in ein Diagramm eingezeichnet. Liegt dann beispielsweise die zu  $t_i$  gehörige Lorenzkurve über der zu  $t_{i+1}$  gehörigen, so schließt man daraus, daß die relative Konzentration im Zeitablauf zugenommen hat, denn zu  $t_{i+1}$  ist der gleiche Anteil von Merkmals-trägern zu einem geringeren Prozentsatz am Gesamtmerkmalsbetrag beteiligt.

Schwierigkeiten entstehen bei dieser Interpretation aus der Graphik dann, wenn sich die beiden Lorenzkurven schneiden. Hier kann man sich weiterhelfen, wenn man den Zusammenhang, der zwischen der Lorenzkurve und dem Gini'schen Konzentrationskoeffizienten besteht, zusätzlich für die Analyse ausnützt: bekanntlich ist der Konzentrationskoeffizient von

Gini  $K_G$  gleich dem Verhältnis der Fläche zwischen der Lorenzkurve und der Dreieckshypothenuse zur Gesamtfläche des Dreiecks in dem die Lorenzkurve dargestellt wird. Stellt man nun dieses Verhältnis bzw. die entsprechenden Gini-Koeffizienten für  $t_i$  und  $t_{i+1}$  einander gegenüber, so erhält man daraus Informationen über die Veränderung der relativen Konzentration zwischen den beiden Zeitpunkten. Allerdings ist dabei zu beachten, daß eine Interpretation aus zwei Gründen nur mit aller Vorsicht anzustellen ist:

1. Es sei  $f_i(x)$  die Verteilung des Gesamtmerkmalsbetrags auf die Merkmalsträger zum Zeitpunkt  $t_i$ . In gleicher Weise sei  $f_{i+1}(x)$  diese Verteilung zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$ . Besteht nun zwischen den Verteilungen die Beziehung

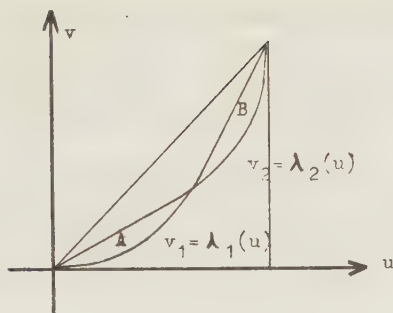
$$f_i(x) = \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} f_{i+1}\left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \cdot x\right)$$

wobei  $\mu_i$  der Mittelwert von  $f_i(x)$ ,  $\mu_{i+1}$  der Mittelwert von  $f_{i+1}(x)$  ist, so erhält man, obwohl in der Verteilung der Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag bedeutende Veränderungen eingetreten sind, für beide Zeitpunkte dieselbe Lorenzkurve und mithin auch denselben Wert für  $K_G$ . <sup>1)</sup>

---

<sup>1)</sup> Taguchi, T., a.a.O. S. 110 f  
Schaich, E., a.a.O. S. 197 ff.

2.



Auch wenn sich die Lorenzkurven für die zwei betrachteten Zeitpunkte unterscheiden, ist es möglich, daß die zugehörigen Gini-Koeffizienten den gleichen numerischen Wert annehmen. Dies ist, wie man sich an Hand obiger Abbildung veranschaulicht, dann der Fall, wenn die Flächen A und B zwischen den beiden sich schneidenden Lorenzkurven gleich groß sind.<sup>1)</sup> In diesem Fall bleibt also  $K_G$  unverändert, obwohl sich die relative Konzentration, wie sie durch die Lorenzkurve erfaßt wird, verändert hat.

Einige der Nachteile, die bei einem derartigen Vorgehen in Kauf genommen werden müssen, können vermieden werden, wenn der Parameter  $n_0$  in die

---

<sup>1)</sup> Beispiele bei Schaich, E., a.a.O., S. 201

Analyse mit einbezogen wird. So schlägt Bruckmann die Maßzahl

$$K_{B_2} = \frac{1 - K_3(t_i)}{1 - K_3(t_{i+1})} \quad \text{zur Beurteilung der Ver-}$$

änderung der relativen Konzentration vor. In diese Maßzahl geht mit Münzner's  $K_3$  der Parameter  $n_0$  ein; die Bruckmann'sche Art der Definition hat darüberhinaus den Vorteil, (etwa gegenüber einer ähnlichen Maßzahl

$$K = \frac{K_3(t_i)}{K_3(t_{i+1})} \quad ) \text{ daß für den Fall, daß } n_0 \text{ für } t_i$$

und  $t_{i+1}$ , gleich ist, "keine Annahme über  $n_0$  getroffen zu werden braucht" <sup>1)</sup>, und daß für

$$n_0^i \neq n_0^{i+1} \quad \text{nur über das Verhältnis } \frac{n_0^i}{n_0^{i+1}}$$

Annahmen getroffen werden müssen.

Diesen Vorteilen steht aber der gleiche Nachteil gegenüber, wie er unter 2.1.1 bereits erörtert wurde: der Vergleich von  $K_G$  für zwei Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , gibt ebenso wie  $K_{B_2}$  als Verhältniszahl keine Auskunft über den Zusammenhang und die zeitliche Entwicklung der Verteilungen, die für  $t_i$  und  $t_{i+1}$ , ihrem Zustand nach charakterisiert werden. Man erhält also keine Information darüber, wie der Zustand zu  $t_i$  in den Zustand zu  $t_{i+1}$ , übergegangen ist. Ein Ausweg aus dieser Problematik bietet sich wiederum

---

<sup>1)</sup> Bruckmann, A., a.a.O., S. 207

z.B. durch Verwendung von  $K_{Gr}$  zur Analyse der Veränderung relativer Konzentration unter Beachtung der unter 2.1 erörterten Besonderheiten.

### 2.3 Kritische Würdigung

Alle bisher diskutierten Verfahren versuchen, den eigentlich dynamischen Vorgang durch eine komparativ-statische Betrachtungsweise zu charakterisieren, wenn auch Hart und Prais z.B. durch ihr stufenweises Vorgehen einen gewissen Übergang gefunden haben. Kein Verfahren geht von einem Ansatz aus, wie er von Münzner für die statische Analyse durch Einführung des Parameters  $n_0$  gegeben wurde: Es fehlt also allen Verfahren ein Parameter der Art  $n_0(t)$ , der für jeden Zeitpunkt  $t$  die Anzahl der Merkmalsträger  $n_0$  angibt, auf die der Gesamtmerkmalsbetrag gleichmäßig verteilt sein müßte, um den Tatbestand der vollständigen Nichtkonzentration im dynamischen Sinn zu erfüllen.

Die Vorschläge von Hart und Prais zur dynamischen Konzentrationsmessung haben den Vorteil, daß sie auch auf die Erfassung der Entwicklungskomponente  $n = n(t)$  ausgerichtet sind. Die Schlußfolgerungen, die das Ergebnis der Arbeit von Hart und Prais darstellen, sind aber, wie oben erwähnt, zum Teil mit Vorsicht zu interpretieren, da die implizite Gleichsetzung  $n = n_0$  sich hier in einer Weise bemerkbar gemacht haben könnte, die die Ergebnisse sehr verfälscht.

Der weitere Nachteil, der in der ausschließlichen Verwendung der Varianzen zur Darstellung der dyna-

mischen Konzentration zu sehen ist, wird durch ein Vorgehen, wie es Grossack vorschlägt, zwar vermieden, indem versucht wird, mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten zu erfassen, wie stark der Zusammenhang zwischen dem Zustand zu  $t_i$  und dem Zustand zu  $t_{i+1}$  ist. Der Korrelationskoeffizient erlaubt aber nur die Beurteilung eines linearen Zusammenhangs zwischen den Verteilungen der Anteile am Merkmalsbetrag zwischen den beiden Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ . So geht aus der in 2.1.2 angestellten Fallunterscheidung hervor, daß  $K_{Gr}$  nur für  $|r|$  nahe bei 1 eine einigermaßen fundierte Interpretation bezüglich der Veränderung der Konzentration zwischen den betrachteten Zeitpunkten erlaubt. Falls  $|r|$  nicht nahe bei 1 ist, ist dies nicht mehr in gleichem Ausmaß der Fall. Hier würde man, in Erweiterung der Grossack'schen Gedankengänge, eventuell Abhilfe schaffen, wenn man zur Erklärung der Beziehung zwischen den  $x_{ij}$  und  $x_{i+1',j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) nicht nur lineare Ansätze sondern auch Polynome höheren Grades zuläßt.

Damit hat sich bei den bisherigen Betrachtungen gezeigt, daß jedes der hier behandelten bisher entwickelten Verfahren zur dynamischen Konzentrationsmessung gewisse Vorteile, aber auch gewisse Nachteile aufweist. Ein Verfahren, in dem alle eigentlich zu berücksichtigenden Komponenten eines Konzentrationsprozesses Eingang gefunden hätten, gibt es noch nicht. Aber auch die Komponenten die be-

rücksichtigt werden, lassen hinsichtlich ihrer Darstellung zum Teil Wünsche offen: das betrifft vor allem auch die Analyse im eigentlich dynamischen Sinn, die in allen Fällen, wie schon wiederholt erörtert, auf der "komparativ-statischen Stufe" haltmacht. Hier vor allem sind Verbesserungen vorstellbar; einige Vorschläge dazu sollen der Inhalt der folgenden Kapitel sein.

### 3. Ein Ansatz zur dynamischen Konzentrationsmessung mit Hilfe von Quadratsummen <sup>1)</sup>

#### 3.1 Matrixdarstellung des Konzentrationsprozesses und Quadratsummen

Das Urdatenmaterial, das als Grundlage für dynamische Konzentrationsmessungen dient, liegt meist in folgender oder ähnlicher Form vor:

| <u>Zeitpunkt <math>t_i</math></u> |                       |
|-----------------------------------|-----------------------|
| <u>Merkmalsträger</u>             | <u>Merkmalsbetrag</u> |
| 1                                 | $a_{i1}$              |
| 2                                 | $a_{i2}$              |
| .                                 | .                     |
| j                                 | $a_{ij}$              |
| .                                 | .                     |
| $n_i$                             | $a_{in_i}$            |

Da, wie bereits erörtert, bei realistischer Betrachtungsweise  $n = n(t)$  als zeitabhängige Variable in die Untersuchung einbezogen werden muß, ist im allgemeinen für verschiedene Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_j$ , das Element j zu  $t_i$  nicht gleich dem Element j zum Zeit-

---

<sup>1)</sup> Es handelt sich dabei um Quadratsummen, wie sie in der Varianzanalyse Verwendung finden.

punkt  $t_i$ , auch wenn das Ordnungsprinzip der Merkmalsträger (z.B. alphabetisch oder der Größe nach) in der tabellarischen Darstellung für die beiden Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_i$ , das gleiche ist. Von der Erörterung des Problems, wie  $n$  als zeitabhängige Größe in die Analyse einbezogen werden kann, soll jedoch zunächst Abstand genommen werden; es sei daher zunächst also  $n_i = n_i$ , wobei zwischen  $t_i$  und  $t_i$ , keine Zugänge und/oder Abgänge und außerdem keine Verschmelzungen und Aufteilungen stattfinden sollen; außerdem gelte ferner  $n_i = n_i = n_0^i$ , d.h. auch das Problem der Bestimmung von  $n_0$  zur Festlegung von vollständiger Nichtkonzentration im dynamischen Sinn wird ausgeklammert.

Unter diesen Annahmen erhält man für jeden Zeitpunkt  $t_i$  einen Spaltenvektor  $u_i'$ , der als Komponenten die Merkmalsbeträge enthält, die den  $n$  Merkmalsträgern zum Zeitpunkt  $t_i$  zuzuordnen sind. Schreibt man die transponierten Vektoren  $u_i$  für  $i = 1, \dots, m$  Zeitpunkte untereinander, so erhält man als Ausgangspunkt für die dynamische Analyse die Matrix  $U$ , die bereits am Anfang dieser Arbeit als Basis für dynamische Konzentrationsmessungen eingeführt wurde. In der in Abschnitt 1.1 dargestellten Art erhält man daraus die Matrix  $X$ , die im folgenden Grundlage für die weiteren Erörterungen sein soll.

Wie bereits behandelt, bezieht sich die statische Konzentrationsmessung jeweils nur auf eine Zeile der Matrix  $X$ : es wird versucht, den Stand der Konzentration, so wie er sich für einen Zeitpunkt  $t_i$  - und damit in der  $i$ -ten Zeile von  $X$  - zeigt,

entsprechend zu charakterisieren. Die bisher entwickelten Verfahren zur komparativ-statistischen Konzentrationsmessung setzen zwei Zeilen  $i$  und  $i'$  in Beziehung; auf die Information, die in den zwischen  $i$  und  $i'$  liegenden Zeilen enthalten ist, wird verzichtet; diese Informationen werden also für die Darstellung des Konzentrationsprozesses nicht herangezogen.

Im folgenden soll versucht werden, Möglichkeiten aufzuzeigen, in die Analyse eines Konzentrationsprozesses Informationen über die Merkmalswertaufteilung für alle in der Matrix  $\mathcal{X}$  erfaßten  $m$  Zeitpunkte (Perioden) einzubringen; darin ist der wesentliche Unterschied zu den oben dargestellten Ansätzen von Grossack und Hart und Prais zu sehen.

Zunächst soll die Quadratsumme  $q^1$ ) der Matrix  $\mathcal{X}$  so in zwei weitere Quadratsummen aufgeteilt werden, daß sich in der einen Quadratsumme  $q_1$  die statische Konzentration, in der anderen Quadratsumme  $q_2$  der dynamische Konzentrationsvorgang niederschlägt:

---

<sup>1</sup>) Quadratsumme: Summe der Quadrate der Abweichungen der  $x_{ij}$  vom Mittelwert  $\bar{x} = \frac{1}{n}$ ; vgl. S. 86  
Kreyszig, E., Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Göttingen 1965, S. 238 ff

|                              |     |     |                |   |   |                |   |                |                                                         |
|------------------------------|-----|-----|----------------|---|---|----------------|---|----------------|---------------------------------------------------------|
|                              |     |     |                |   |   |                |   |                | Zeilen-<br>mittel-<br>werte                             |
|                              |     | $j$ | 1              | 2 | . | $j$            | . | $n$            |                                                         |
| $i$                          | 1   | [   | $x_{11}$       | . | . | $x_{1j}$       | . | $x_{1n}$       | $\bar{x}_{1.} = \frac{1}{n}$                            |
|                              | .   |     | .              | . | . | .              | . |                |                                                         |
|                              | $i$ |     | .              | . | . | $x_{ij}$       | . | .              | $\bar{x}_{i.} = \frac{1}{n}$                            |
|                              | .   |     | .              | . | . | .              | . |                |                                                         |
|                              | $m$ |     | $x_{m1}$       | . | . | $x_{mj}$       | . | $x_{mn}$       | $\bar{x}_{m.} = \frac{1}{n}$                            |
| Spalten-<br>mittel-<br>werte |     |     | $\bar{x}_{.1}$ |   |   | $\bar{x}_{.j}$ |   | $\bar{x}_{.n}$ | $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{x}_{.j}$ |

Man definiert wie folgt:

$$\text{Quadratsumme } q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

$$\text{mit } \bar{\bar{x}} = \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^m n \cdot \bar{x}_{i.} = \frac{1}{n},$$

$$\text{wobei } \bar{x}_{1.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{1j} = \frac{1}{n}, \text{ da } \sum_{j=1}^n x_{1j} = 1. \quad ^1)$$

q lässt sich mit Hilfe des in 1.1 entwickelten Modells auch anschaulich deuten, wobei auf die Ausführungen in 2.1.1 (s.S. 51 ff) zurückgegriffen werden kann.

---

<sup>1)</sup> vgl. 1.1

Die Teilsumme  $\sum_j (x_{ij} - \frac{1}{n})^2$  ist gleich dem Quadrat des Betrages des Differenzvektors  $|\mathbf{e}(t_i) - \bar{\mathbf{e}}|$ , d.h. aber  $\sum_j (x_{ij} - \frac{1}{n})^2$  ist das Quadrat der Entfernung des Konzentrationspunktes  $P_i$  vom "Nichtkonzentrationspunkt"  $\bar{P}$ . Die Quadratsumme  $q$  stellt also die Summe der Quadrate der Entfernungen der  $m$  Orte (die der Konzentrationspunkt zwischen  $t_1$  und  $t_m$  durchlaufen hat) vom "Nichtkonzentrationspunkt"  $\bar{P}$  dar.

Für die Quadratsummen  $q_1$  und  $q_2$ , in die  $q$  aufgeteilt wird ( $q = q_1 + q_2$ ), gilt:

$$q_1 = m \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 = m \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2$$

$\bar{x}_{.j}$  ist der durchschnittliche Anteil an den  $m$  Gesamtmerkmalsbeträgen  $A_i$  des  $j$ -ten Merkmalsträgers über die Zeit, wenn die Entwicklung über  $m$  Zeitpunkte beobachtet wird.

$$q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$$

Zusammenfassend dargestellt wird die Aufteilung also

folgendermaßen vorgenommen:

$$\begin{aligned}
 q &= q_1 + q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \\
 &= m \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2
 \end{aligned}$$

Was bedeuten nun  $q_1$  und  $q_2$  für die Erfassung eines Konzentrationsprozesses?

Beachtet man, daß

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x}_{.i} = \frac{1}{n}, \text{ so erfaßt } \frac{q_1}{m} = \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2$$

die Dispersion zwischen den über die Zeit gemittelten durchschnittlichen Anteilen  $\bar{x}_{.j}$  der  $j = 1, \dots, n$  Merkmalsträger und dem Anteil  $\frac{1}{n}$ , der dem Anteil jedes Merkmalsträgers bei gleichmäßiger Aufteilung entspricht.

Die Bedeutung von  $q_1$  läßt sich mit Hilfe des im ersten Kapitel dieser Arbeit entwickelten Instrumentariums auch anschaulich darstellen: In Abschnitt 1.1 wurde die Vektorfunktion  $\mathcal{V}(t)$  besprochen, die notwendig und hinreichend ist, um einen Konzentrationsprozeß zu charakterisieren. Die ebenfalls in Abschnitt 1.1 eingeführte Matrix  $\mathcal{X}$  enthält in der dort besprochenen Weise die Funktionswerte der Funktion  $\mathcal{V}(t)$  für die Zeitpunkte  $t_1, \dots, t_i, \dots, t_m$ . Jeder Zeilenvektor  $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}(t_i) = (x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{in})$  beschreibt

die Lage des "Konzentrationspunktes" zum Zeitpunkt  $t_i$ , der Ort sei mit  $P_i$  bezeichnet. Den Zeitpunkten  $t_1, \dots, t_m$  entsprechen damit die Orte  $P_1, \dots, P_m$ . Durch die Verbindung der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ ,  $P_2$  und  $P_3$  usw. bis  $P_{m-1}$  und  $P_m$  erhält man einen Polygonzug, der sich für immer kleinere Zeitabstände  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  der Kurve annähert, die durch die Zeitfunktion  $\mathcal{C}(t)$  beschrieben wird, und die den Weg darstellt, den der Konzentrationspunkt zwischen den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_m$  durchlaufen hat.

Der Zeilenvektor  $\bar{\mathcal{C}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n)$ , der als Komponenten die Spaltenmittelwerte der Matrix enthält, beschreibt die Lage eines Punktes  $\bar{P}$  im  $\mathcal{R}^n$ .  $\bar{P}$  ist aber ein Punkt von besonderer Bedeutung, denn  $\bar{P}$  ist der Schwerpunkt des Kurvenstücks, das durch die Funktion  $\mathcal{C}(t)$  im Zeitintervall  $[t_1; t_m]$  beschrieben wird, bzw. der Schwerpunkt des oben dargestellten, für  $\mathcal{C}(t)$  repräsentativen Polygonzuges.  $\bar{P}$  repräsentiert damit die über die Zeit gemittelte durchschnittliche Konzentration: man erhält  $\bar{P}$  als Konzentrationspunkt, wenn man in der Matrix  $\mathcal{K}$  von den darin erfaßten Einzelperioden zu einer neuen größeren Periode übergeht, die das gesamte Zeitintervall  $[t_1; t_m]$  umfaßt.

---

<sup>1)</sup> Hierbei handelt es sich um eine theoretische Überlegung; in der Praxis ist es oft nicht möglich oder nicht sinnvoll ein Konzentrationsmerkmal für jeden Zeitpunkt festzulegen (wobei  $t$  als stetig anzusehen ist).

Die Entfernung zwischen  $\bar{P}$  und dem "Nichtkonzentrationspunkt  $\bar{P}^1$ "), dessen sämtliche Koordinaten  $\frac{1}{n}$  sind, kann als geeignetes Instrument zur Charakterisierung der über die Zeit gemittelten "durchschnittlichen", statischen Konzentration und damit als statisches Konzentrationsmaß angesehen werden. Diese Entfernung ist definiert als

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2}$$

So ist auch eine anschauliche Interpretation des Dispersionsmaßes  $\frac{q_1}{m}$  insofern möglich, als  $\frac{q_1}{m}$  das Quadrat der Entfernung zwischen den "besonderen" Punkten  $\bar{P}$  und  $\bar{P}$  ist.

Allerdings ist bezüglich  $q_1$  als Konzentrationsmaß zu bedenken, daß  $\bar{P}$  möglicherweise der Schwerpunkt von völlig verschiedenen Funktionen  $\varphi(t)$  sein kann; dementsprechend kann sich für unterschiedliche Konzentrationsprozesse der gleiche numerische Wert für  $q_1$  ergeben. Um diesbezüglich zu differenzieren, benötigt man also noch ein weiteres Maß, das es erlaubt, die Mehrdeutigkeit von  $q_1$  zumindest einzuschränken. Das ist möglich mit Hilfe der Quadrat-

$$\text{summe } q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2.$$

Vertauscht man im Ausdruck für  $q_2$  die Summenzeichen,

---

<sup>1)</sup>  $\bar{P}$  ist der Schwerpunkt der "Konzentrationsebene";  
vgl. S. 11

so sieht man deutlicher, daß in  $q_2$  mit der Teilsumme

$\sum_i (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$  für jeden der  $j = 1, \dots, n$  Merkmalsträger die Abweichungen für  $m$  Zeitpunkte  $t_i$  zwischen  $x_{ij}$  (Anteil des Merkmalsträgers  $j$  am Gesamtmerkmalsbetrag  $A_i$  zum Zeitpunkt  $t_i$ ) und  $\bar{x}_{.j}$  (durchschnittlicher Anteil des Merkmalsträgers  $j$  an den  $m$  Gesamtmerkmalsbeträgen für die gesamte betrachtete Zeitspanne) eingeht. Auch hierbei ist wieder eine anschauliche Interpretation möglich:

$\sqrt{\sum_i (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2}$  ist die Entfernung zwischen dem Ort  $P_i$  des Konzentrationspunktes zum Zeitpunkt  $t_i$  und dem Punkt  $\bar{P}$ , dem Schwerpunkt des Kurvenstücks, das der Konzentrationspunkt durchlaufen hat, projiziert auf die Koordinate des  $j$ -ten Merkmalsträgers. In  $q_2$  ist aber (für alle  $j$ )  $\sum_i (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$  enthalten, also die Summe [über alle Zeitpunkte  $t_i$  ( $i = 1, \dots, m$ )] der Quadrate der eben beschriebenen Entfernung;  $\sum_i (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$  ist also umso größer, je weiter die "Konzentrationspunkte"  $P_i$  von  $\bar{P}$  entfernt liegen.<sup>1)</sup>

Damit erlaubt  $q_2$  die Beurteilung eines Konzentrationsprozesses insoweit, als man von  $q_2$  darauf schließen kann, ob die vom Konzentrationspunkt

---

<sup>1)</sup> Hier sei ein Hinweis auf ein mechanisches Analogon gegeben:  $q_2$  entspricht der Summe der Trägheitsmomente bezüglich  $\bar{P}$  wenn alle  $P_i$  mit der Masse 1 belegt wären.

durchlaufenen Punkte  $P_i$  weit um  $\bar{P}$  verstreut oder nahe bei  $\bar{P}$  liegen. Allerdings gibt  $q_2$  keinen Aufschluß darüber, in welcher Reihenfolge die  $P_i$  durchlaufen worden sind, denn diese wesentliche Information geht durch die Quadrierung und Summierung verloren. Insofern ist also Mehrdeutigkeit sowohl der Länge als auch der Richtung nach bei der Darstellung des Weges durch  $q_2$  gegeben.

Falls  $q_2$  jedoch klein ist (siehe unten!), so heißt das, daß die Quadratsumme  $q$  in  $\mathcal{X}$  vor allem durch  $q_1$  erklärt wird. Da die  $P_i$  alle sehr nahe bei  $\bar{P}$  liegen, ist in diesem Fall keine wesentliche Dynamik in dem Sinn, daß sich die Positionen der einzelnen Merkmalsträger wesentlich verändert haben, vorhanden gewesen.

Die Überlegungen zur Bedeutung der zwei Summanden  $q_1$  und  $q_2$ , in die die Quadratsumme  $q$  der Matrix aufgeteilt wurde, haben also gezeigt, daß in ihnen, wenn auch nicht in unzweideutiger Weise, der statische und der dynamische Aspekt der Konzentration ihren Ausdruck finden. Im folgenden Abschnitt soll daher nach den Extrema dieser Quadratsummen  $q_1$  und  $q_2$  gesucht werden, um Bezugspunkte für die Beurteilung von Konzentrationsprozessen zu finden und Interdependenzen zwischen  $q_1$  und  $q_2$  zu erfassen, die sich aus der Gleichung  $q = q_1 + q_2$  ergeben. Insofern sind auch die Beziehungen darzustellen, die zwischen den Extrema für  $q_1$  und  $q_2$  einerseits und Extrema für  $q$  andererseits bestehen.

### 3.2 Die Bestimmung der Extrema der Quadratsummen

$q_1, q_2$  und  $q$

#### 3.2.1 Minimum von $q_1, q_2$ und $q$

1. Gesucht sind die Minima der Funktion

$$q_1(\bar{x}_{.1}, \dots, \bar{x}_{.n}) = m \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$0 \leq \bar{x}_{.j} \leq 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{.j} = 1$$

Da es sich bei  $q_1$  um eine Quadratsumme, multipliziert mit dem positiven Proportionalitätsfaktor  $m$  handelt, muß gelten:

$$q_1 \geq 0$$

Daraus folgt, daß die Nullstellen von  $q_1(\bar{x}_{.1}, \dots, \bar{x}_{.n})$  zugleich die Minima sind.

Diese Nullstellen findet man, wenn man überlegt, daß

$$\sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2 = 0 \iff$$

$$\iff (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2 = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

$$\iff \bar{x}_{.j} = \frac{1}{n} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

$q_1$  erreicht also dann das Minimum, wenn alle  $\bar{x}_{.j} = \frac{1}{n}$ , d.h. wenn für jeden der  $n$  Merkmalsträger der über die Zeit gemittelte Anteil an den  $m$  Gesamtmerkmalsbeträgen  $A_i$  gleich groß und  $\frac{1}{n}$  ist. Im Sinn des in 1.1 entwickelten Modells bedeutet das, daß der Schwerpunkt des Polygonzuges, den die  $P_i$  auf der Konzentrationsebene bilden, in den Schwerpunkt  $\bar{P}$  der Konzentrationsebene fällt. Die Lage der  $P_i$ , also die Werte  $x_{ij}$ , sind dadurch nicht eindeutig bestimmt, insbesondere ist es auch nicht notwendig, daß  $x_{ij} = \frac{1}{n}$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ).

In Anknüpfung an die Ausführungen auf Seite 89 ist die Bedeutung dieses Minimums für wirtschaftliche Konzentrationsprozesse folgendermaßen zu sehen:

Wenn man in der Matrix  $\mathcal{X}$  von den darin erfaßten Einzelperioden zu der Periode übergeht, die den gesamten Zeitraum  $[t_1, t_m]$  umfaßt, haben sich die Anteile der Merkmalsträger so entwickelt, daß ihr Mittelwert  $\bar{x}_{.j} = \frac{1}{n}$  und damit für die Gesamtperiode von Nichtkonzentration gesprochen werden kann.

2. Gesucht sind die Minima der Funktion

$$q_2(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

Da es sich bei  $q_2$  ebenso wie bei  $q_1$  um eine Quadratsumme handelt, gilt auch für  $q_2$  :

$$q_2 \geq 0$$

In gleicher Weise wie oben gilt es also, die Nullstellen für  $q_2(x_{11}, \dots, x_{mn})$  zu ermitteln: für welche  $x_{ij}$  nimmt also  $q_2$  den Wert 0 an?

Ähnlich wie oben, ist auch hier

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m; j=1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{ij} = \bar{x}_{.j} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$$

d.h. im einzelnen  $x_{i1} = \bar{x}_{.1}$  für alle  $i=1, \dots, m$  und  
 $x_{i2} = \bar{x}_{.2}$  für alle  $i=1, \dots, m$  usw.

Anschaulich interpretiert bedeutet das, daß  $q_2$  dann minimal wird, wenn die Punkte  $P_i$  in allen  $n$  Koordinaten übereinstimmen, d.h. alle Punkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) fallen zusammen. Sie müssen aber nicht notwendig in  $\bar{P}$  zusammenfallen.

3. Gesucht sind die Minima der Funktion

$$q(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \frac{1}{n})^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \text{für } i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } i=1, \dots, m$$

Die Minima findet man in gleicher Weise wie oben als die Nullstellen für  $q(x_{11}, \dots, x_{mn})$ :

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \frac{1}{n})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_{ij} - \frac{1}{n})^2 = 0 \quad \text{für alle } i=1, \dots, m; j=1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{ij} = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$$

d.h. im einzelnen:

$$x_{i1} = \frac{1}{n}$$

$$x_{i2} = \frac{1}{n}$$

usw. bis

$$x_{in} = \frac{1}{n}$$

} für alle  $i=1, \dots, m$

Der anschaulichen Interpretation mit Hilfe des in 1.1 dargestellten Modells entnimmt man, daß  $q$  dann minimal wird, wenn die Punkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) in allen  $n$  Koordinaten übereinstimmen und jede Koordinate zu jedem Zeitpunkt den Wert  $\frac{1}{n}$  hat; die Punkte  $P_i$  fallen dann für alle  $i = 1, \dots, m$  im Punkt  $\bar{P}$  zusammen.

Aus den Überlegungen zu den Minima für  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q$  folgt also, daß  $q$  im Gegensatz zu  $q_1$  und  $q_2$  nur für  $x_{ij} = \frac{1}{n}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) minimal wird. Zwischen dem Minimum  $q$  und den Minima  $q_1$  und  $q_2$  besteht die Beziehung, daß  $q$  nur minimal wird, wenn  $q_1$  und  $q_2$  zugleich minimal und gleich Null sind; das ist aber nur einmal der Fall, wenn alle Punkte  $P_i$  in  $\overline{P}$  zusammenfallen.

### 3.2.2 Maxima von $q$ , $q_1$ und $q_2$

1. Gesucht sind die Maxima der Funktion

$$q(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \frac{1}{n})^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \text{für } i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } i=1, \dots, m.$$

Man überlegt leicht, daß  $q$  dann maximal wird, wenn alle Konzentrationspunkte  $P_i$  in einer oder mehreren Ecken der Konzentrationshyperebene liegen. Das läßt sich wie folgt zeigen:

den Wert des Maximums berechnet man zu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \frac{1}{n})^2 &= \sum_{i=1}^m \left[ (1 - \frac{1}{n})^2 + (n-1) (-\frac{1}{n})^2 \right] = \\ &= m \cdot \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß sich bei jeder anderen Lage der  $P_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) ein kleinerer Wert für  $q$  ergibt. Hierfür genügt es  $q$  für den Fall zu berechnen, daß  $m-1$  Punkte  $P_i$  in einer oder mehreren Ecken der Konzentrationshyperebene liegen und ein Punkt  $P_i$  nicht in einer Ecke liegt; die Koordinaten dieses Punktes seien o.E.d.A. gegeben durch  $(1 - \Delta, \Delta, 0, \dots, 0)$  mit  $0 < \Delta < 1$ .

$$\begin{aligned}
 q(x_{11}, \dots, x_{mn}) &= \sum_{i=1}^{m-1} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + (n-1) \left(-\frac{1}{n}\right)^2 \right] + \\
 &+ \left(1 - \Delta - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\Delta - \frac{1}{n}\right)^2 + (n-2) \left(-\frac{1}{n}\right)^2 = \\
 &= m \cdot \frac{n-1}{n} + 2 \Delta^2 - 2 \Delta < m \cdot \frac{n-1}{n}
 \end{aligned}$$

da  $2 \Delta^2 < 2 \Delta$  wegen  $0 < \Delta < 1$ ;

$q$  ist also dann maximal, wenn in jeder Zeile der Matrix  $\mathcal{K}$  ein Element  $x_{ij} = 1$  und die übrigen Elemente 0 sind: d.h., daß für jeden Zeitpunkt  $t_i$  (bzw. Zeitraum) einem Merkmalsträger der Gesamtmerkmalsbetrag  $A_i$  zuzuordnen ist, während die übrigen Merkmalsträger jeweils keinen Anteil daran haben.

2. Gesucht sind die Maxima der Funktion

$$q_1(\bar{x}_{.1}, \dots, \bar{x}_{.n}) = \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$0 \leq \bar{x}_{.j} \leq 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{.j} = 1.$$

$q_1$  wird dann maximal, wenn  $\bar{P}$  in einer Ecke der Konzentrationshyperebene liegt. Man überlegt dazu ähnlich wie oben: der Wert des Maximums für  $q_1$  ist

$$\sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2 = (1 - \frac{1}{n})^2 + (n-1)(-\frac{1}{n})^2 =$$

$$= \frac{n-1}{n}.$$

Liegt  $\bar{P}$  nicht in einer Ecke, so errechnet man als Wert für  $q_1$  z.B.

$$\sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2 = (1 - \Delta - \frac{1}{n})^2 + (\Delta - \frac{1}{n})^2 +$$

$$+ (n-2)(-\frac{1}{n})^2 = \frac{n-1}{n} - 2\Delta + 2\Delta^2 < \frac{n-1}{n}$$

da  $2\Delta^2 < 2\Delta$  wegen  $0 < \Delta < 1$ .

Unter den Nebenbedingungen wie oben angegeben gibt es insgesamt  $n$  Maxima für  $q_1$ , nämlich wenn ein  $x_{.j} = 1$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) und alle übrigen  $\bar{x}_{.j} = 0$  ( $j' \neq j$ ) sind. Eine derartige Lage des Punktes  $\bar{P}$ , dessen Koordinaten durch  $\bar{x}_{.j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) gegeben sind, ist wegen

$$\bar{x}_{.j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{ij} \text{ und der Bedingung } 0 \leq x_{ij} \leq 1$$

nur möglich, wenn alle  $P_i$  für  $i = 1, \dots, m$  jeweils untereinander gleich sind und mit  $\bar{P}$  zusammenfallen.

$q_1$  ist also genau dann maximal und hat den Wert  $\frac{n-1}{n}$ , wenn die den Konzentrationsprozeß charakterisierende Matrix  $\mathcal{X}$  eine der folgenden  $n$  Gestalten aufweist:

- 1) In der 1. Spalte von  $\mathcal{K}$  treten lauter Einsen auf und in allen übrigen Spalten nur Nullen.
- 2) In der 2. Spalte von  $\mathcal{K}$  treten lauter Einsen auf und in allen übrigen Spalten nur Nullen.
- .....
- n) In der n-ten Spalte von  $\mathcal{K}$  treten lauter Einsen auf und in allen übrigen Spalten nur Nullen.

Dieses Maximum bedeutet, daß für jeden Zeitpunkt  $t_i$  einem einzigen und immer demselben Merkmals-träger der Gesamtmerkmalsbetrag  $A_i$  zuzuordnen ist; hier bleibt also der Konzentrationsstand im Zeitablauf erhalten.

3. Gesucht sind die Maxima der Funktion

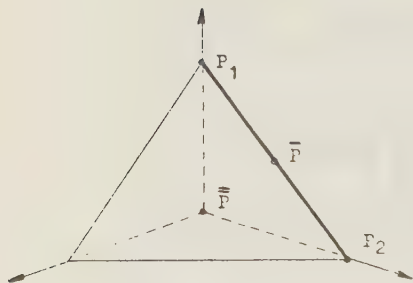
$$q_2(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$$

unter den Nebenbedingungen

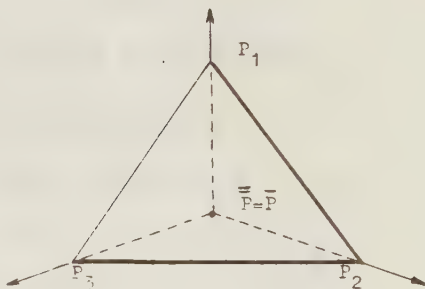
$$\begin{aligned} 0 \leq x_{ij} \leq 1 & \quad \text{für } i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & \quad \text{für } i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

In 3.1 wurde  $q_2$  anschaulich als Summe der Quadrate der Entfernungen der  $P_i$  von  $\bar{P}$ , dem "Schwerpunkt" des Punktesystems  $P_1, \dots, P_m$  dargestellt.  $q_2$  ist somit sicher dann maximal, wenn jede dieser Entfernungen maximal ist. Im folgenden soll gezeigt werden, daß das dann der Fall ist,

wenn alle  $P_1, \dots, P_m$  in irgendwelchen Ecken der Konzentrationshyperebene liegen. Für  $n = 3$  kann diese Tatsache leicht veranschaulicht werden; dabei fällt anhand der nachstehenden Abbildungen auf, daß die Anzahl  $m$  der Punkte  $P_i$ , die der Anzahl der Zeilen in  $\mathcal{K}$  entspricht, eine wesentliche Rolle spielt.



Eine andere Verteilung von  $P_1, P_2$  auf die Ecken der Konzentrationsfläche ergibt gleiches  $q_2$ .



Für die folgende Darstellung wird daher bezüglich  $m$  eine Fallunterscheidung vorgenommen.

$$m \leq n$$

$q_2$  ist für diesen Fall genau dann maximal, wenn die Punkte  $P_i$  in  $m$  verschiedenen Ecken der Konzentrationshyperebene liegen;  $\mathcal{K}$  enthält in  $m$  von  $n$  Spalten genau einmal die Eins, z.B. in folgender Weise:

| $i \backslash j$ | 1             | 2             | .   | . | $m$           | $m+1$ | . | . | $n$ |
|------------------|---------------|---------------|-----|---|---------------|-------|---|---|-----|
| 1                | 1             | 0             | 0   | . | 0             | 0     | . | . | 0   |
| 2                | 0             | 1             | 0   | . | 0             | 0     | . | . | 0   |
| .                | 0             | 0             | 1   | 0 | 0             | 0     | . | . | 0   |
| .                | 0             | .             | 0   | 1 | 0             | 0     | . | . | 0   |
| $m$              | 0             | .             | .   | 0 | 1             | 0     | . | . | 0   |
| $\bar{x}_j$      | $\frac{1}{m}$ | $\frac{1}{m}$ | ... |   | $\frac{1}{m}$ | 0     | . | . | 0   |

Der maximale Wert von  $q_2$  beträgt dann:

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \\
 &= m \left[ \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + (m-1) \left(-\frac{1}{m}\right)^2 \right] = \\
 &= m - 1
 \end{aligned}$$

Daß es sich dabei um den Maximalwert handelt, den  $q_2$  einnehmen kann, überprüft man ähnlich wie oben für  $q$  und  $q_1$ : liegt wenigstens ein Punkt  $P_i$  nicht in einer Ecke, so errechnet man als Wert für  $q_2$  einen kleineren Wert als  $m - 1$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde von folgender Matrix ausgegangen:

|              |     |     |         |         |     |       |         |         |     |
|--------------|-----|-----|---------|---------|-----|-------|---------|---------|-----|
| $j$          | $1$ | $2$ | $\dots$ | $\dots$ | $m$ | $m+1$ | $\dots$ | $\dots$ | $n$ |
| $i \swarrow$ | $1$ | $2$ | $\dots$ | $\dots$ | $m$ | $m+1$ | $\dots$ | $\dots$ | $n$ |

|         |            |          |         |         |     |     |         |         |     |
|---------|------------|----------|---------|---------|-----|-----|---------|---------|-----|
| $1$     | $1-\Delta$ | $\Delta$ | $0$     | $\dots$ | $0$ | $0$ | $\dots$ | $\dots$ | $0$ |
| $2$     | $0$        | $1$      | $0$     | $\dots$ | $0$ | $0$ | $\dots$ | $\dots$ | $0$ |
| $\dots$ | $0$        | $0$      | $1$     | $0$     | $0$ | $0$ | $\dots$ | $\dots$ | $0$ |
| $\dots$ | $0$        | $\dots$  | $0$     | $1$     | $0$ | $0$ | $\dots$ | $\dots$ | $0$ |
| $m$     | $0$        | $\dots$  | $\dots$ | $0$     | $1$ | $0$ | $\dots$ | $\dots$ | $0$ |

|                |                      |                      |               |         |               |     |         |         |     |
|----------------|----------------------|----------------------|---------------|---------|---------------|-----|---------|---------|-----|
| $\bar{x}_{.j}$ | $\frac{1-\Delta}{m}$ | $\frac{1+\Delta}{m}$ | $\frac{1}{m}$ | $\dots$ | $\frac{1}{m}$ | $0$ | $\dots$ | $\dots$ | $0$ |
|----------------|----------------------|----------------------|---------------|---------|---------------|-----|---------|---------|-----|

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \left[ \left(1 - \Delta - \frac{1-\Delta}{m}\right)^2 + \left(\Delta - \frac{1+\Delta}{m}\right)^2 + \right. \\
 &+ m - 2 \left(-\frac{1}{m}\right)^2 \left. \right] + \left[ \left(-\frac{1-\Delta}{m}\right)^2 + \right. \\
 &+ \left(1 - \frac{1+\Delta}{m}\right)^2 + (m-2) \left(-\frac{1}{m}\right)^2 \left. \right] + \\
 &+ (m-2) \left[ \left(-\frac{1-\Delta}{m}\right)^2 + \left(-\frac{1+\Delta}{m}\right)^2 + \right. \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 - (m-3) \left(-\frac{1}{m}\right)^2 \left. \right] = \\
 &= 2 \left(\frac{m-1}{m}\right) \Delta^2 - 2\Delta + m - 1
 \end{aligned}$$

für  $0 < \Delta < 1$

Da für  $m \geq 2$   $\frac{m-1}{m} < 1$   
 und für  $0 < \Delta < 1$   $\Delta^2 < \Delta$

folgt, daß  $2 \frac{m-1}{m} \Delta^2 - 2\Delta < 0$ ;

der Wert für  $q_2$  ist also kleiner als das Maximum  $m - 1$ .

Wenn bei obiger Berechnung von  $q_2$   $\Delta = 1$  gesetzt wird, so besagt das für die Lage der  $P_1$ , daß  $m - 1$  Punkte in  $m - 1$  verschiedenen Ecken der Hyperebene liegen und der  $m$ -te Punkt mit einem der  $m - 1$  anderen zusammenfällt. In diesem Fall ergibt sich wiederum für  $q_2$  ein kleinerer Wert als das Maximum.

Nochmals sei also betont, daß  $q_2$  für  $m \leq n$  genau dann maximal ist, wenn in  $m$  verschiedenen Spalten der Matrix  $\mathcal{X}$  genau einmal die Eins vorkommt und die Matrix sonst lauter Nullen aufweist. Das kann nun analog auf den Fall  $m > n$  übertragen werden.

$$m > n$$

Da die Konzentrationshyperebene nur  $n$  verschiedene Ecken aufweist, müssen hinsichtlich der Verteilung der  $P_i$  auf die  $n$  Ecken zwei Fälle unterschieden werden, nämlich je nachdem ob  $m$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $n$  ist oder nicht.

Für  $m = k \cdot n$

(mit  $k$  ganz positiv)

ist  $q_2$  genau dann maximal, wenn in jeder Ecke der Konzentrationshyperebene genau  $k$  Punkte  $P_i$  liegen.

Die Matrix  $\mathcal{X}$  kann dann z.B. folgende Gestalt annehmen:

| $i \backslash j$ | 1 | . | . | n |
|------------------|---|---|---|---|
| 1                | 1 | . | . | 0 |
| .                | 0 | 1 | . | . |
| .                | . | . | 1 | 0 |
| n                | 0 | . | 0 | 1 |
| .                | . | . | . | . |
| .                | . | . | . | . |
| .                | 1 | 0 | . | 0 |
| .                | 0 | 1 | . | . |
| .                | . | . | 1 | 0 |
| kn               | 0 | . | 0 | 1 |

$$\bar{x}_{.j} = \frac{k}{m} = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } j=1, \dots, n$$

Der Maximalwert von  $q_2$  berechnet sich somit allgemein zu:

$$q_2 = m \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + (n-1) \left(-\frac{1}{n}\right)^2 \right] =$$

$$m \cdot \frac{n-1}{n} = m - k$$

Für  $k = 1$  würde dieser Wert in den für  $m = n$  berechneten Wert übergehen.

Daß für keine andere Lage der Punkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) als oben beschrieben  $q_2$  den Maximalwert  $m - k$  annimmt, kann auf die gleiche Weise wie bei  $q$  und  $q_1$  gezeigt werden. Diese Berechnungen werden hier wegen ihres relativ großen Umfangs nicht aufgeführt.

Für  $m = k' \cdot n + m'$

(mit  $k'$  und  $m'$  ganz positiv)

ist  $q_2$  genau dann maximal, wenn in jeder Ecke der Konzentrationshyperebene wenigstens  $k'$  und höchstens  $k' + 1$  Punkte  $P_i$  liegen.

Die Matrix  $\mathcal{K}$  weist dann in jeder Spalte  $k'$  oder  $k' + 1$  mal die Eins auf und sonst Null, in keiner Zeile tritt öfter als einmal die Eins auf.

Zur Verdeutlichung sei hier ein spezielles Beispiel für die Matrix  $\mathcal{K}$  aufgeführt:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & j & & & \\
 i \swarrow & 1 & 2 & . & n \\
 1 & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & . & . & 0 \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ n & 0 & . & 1 \\ n+1 & 1 & . & 0 \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ 2n & 0 & . & 1 \\ 2n+1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2n+m' & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\bar{x}_{.j} = \frac{k'+1}{m} \frac{k'+1}{m} \frac{k'+1}{m} \frac{k'}{m}$$

Allgemein berechnet man dann bei

$$m = k' \cdot n + m' \quad \text{für } q_2:$$

$$\begin{aligned}
 q_2 &= m' \cdot \left[ (k'+1) \cdot \left(1 - \frac{k'+1}{m}\right)^2 + \right. \\
 &+ (m-k'-1) \cdot \left(-\frac{k'+1}{m}\right)^2 \left. \right] + \\
 &+ (n-m') \left[ k' \left(1 - \frac{k'}{m}\right)^2 + (m-k') \cdot \left(-\frac{k'}{m}\right)^2 \right] = \\
 &= m - k' - \frac{m'}{m} (k' + 1)
 \end{aligned}$$

Für  $m' = 0$  geht dieser Wert in den für  $m = k \cdot n$  berechneten über.

Wieder müßte untersucht werden, ob  $q_2$  einen kleineren Wert als das Maximum annimmt, wenn wenigstens ein Punkt  $P_i$  sich nicht in der oben beschriebenen Weise in einer Ecke der Konzentrationshyperebene befindet. Die Berechnungen hierzu seien wegen ihrer Länge hier nicht aufgeführt.

Die Maxima von  $q_2$  sind im Hinblick auf den realen wirtschaftlichen Hintergrund in folgender Weise zu interpretieren: wenn  $q_2$  seinen Maximalwert annimmt, so bedeutet das für die Fälle  $m < n$  und  $m = n$ , daß zu jedem in der Matrix  $\mathcal{X}$  erfaßten Zeitpunkt  $t_i$  jeweils ein anderer der  $n$  Merkmalsträger den Gesamtmerkmalsbetrag  $A_i$  ganz auf sich vereinigt hat. Für den Fall  $m > n$  ist wie oben zu unterscheiden: ist  $m$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $n$  ( $m=k \cdot n$ ) so erfolgt die Interpretation analog

zum Fall  $m = n$ , nur daß hier im Zeitablauf jeder der  $n$  Merkmalsträger  $k$ -mal alleiniger "Inhaber" des Gesamtmerkmalsbetrags war. Falls  $m$  kein ganzzahliges Vielfaches von  $n$  ist ( $m = k' \cdot n + m'$ ), so war, ebenso wie für  $m = k \cdot n$ , jedem der  $n$  Merkmalsträger jeweils  $k'$ -mal der Gesamtmerkmalsbetrag  $A_1$  zuzuordnen, zusätzlich waren noch  $m'$  verschiedene von den insgesamt  $n$  Merkmalsträgern in den restlichen  $m'$  Zeitpunkten alleinige "Inhaber" des Gesamtmerkmalsbetrages  $A_1$ .

Zusammenfassend ist also zu sagen, daß, wenn  $q_2$  maximal ist, der in der Matrix  $\mathcal{K}$  erfaßte Prozeß durch Umschichtungen charakterisiert ist und zwar in der Art, daß alle Merkmalsträger im Zeitablauf gleich an diesen Umschichtungen beteiligt sind.

4. Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen noch die Beziehungen, die zwischen den Maxima von  $q$ ,  $q_1$  und  $q_2$  bestehen, zusammenfassend dargestellt werden; dabei wird auf die Ergebnisse der obigen Ableitungen unter 1. bis 3. zurückgegriffen.

Aus den Erörterungen zu 1. und 2. entnimmt man: wenn  $q_1$  maximal ist, dann ist auch  $q$  maximal, aber  $q$  hat noch weitere Maxima.

Aus 1. und 3. folgt, daß  $q$  maximal ist, wenn  $q_2$  seinen Maximalwert annimmt;  $q$  ist aber auch noch an anderen Stellen maximal.

Aus 2. und 3. geht für die Beziehung zwischen den Maxima von  $q_1$  und  $q_2$  hervor, daß, wenn  $q_1$  maximal

ist,  $q_2$  keinesfalls maximal sein kann.  $q_2$  kann in diesem Fall sogar Null sein. Falls dagegen  $q_2$  maximal ist, so ist  $q_1$  nicht maximal, für den Fall  $m = k \cdot n$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ist  $q_1$  minimal, d.h. Null.

Insgesamt ist festzuhalten, daß über Maxima von  $q$  generell nur das unter 1. Ausgeführte gesagt werden kann; in Bezug auf  $q_1$  und  $q_2$  ist insbesondere festzuhalten, daß  $q$  noch weitere Maxima hat, für die weder  $q_1$  noch  $q_2$  maximal sind.

### 3.3 Die besondere Bedeutung der Quadratsummen

$q$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  bei dynamischer Konzentrations-  
messung.

Für die Beurteilung von Konzentrationsprozessen mit Hilfe der Quadratsummen  $q$ ,  $q_1$  und  $q_2$  ist es wichtig, sich klar zu machen, welcher Standpunkt für die Betrachtung hierbei bezogen wird. Dazu ist auf die Diskussion der Frage, was eine dynamische Konzentrationsmessung im eigentlichen Sinn sein sollte, hinzuweisen (vgl. z.B. 1.1).

Wenn man die Quadratsumme  $q$  und die Teilsummen  $q_1$  und  $q_2$  der Matrix  $\mathcal{X}$  für die Konzentrationsmessung verwendet, so geht man davon aus, daß man  $m$  Orte des Konzentrationspunktes kennt; es handelt sich dabei um  $m$  Punkte der stetigen Kurve  $\mathcal{C}(t)$ .<sup>1)</sup> Die  $m$  Orte, in denen sich der Konzentrationspunkt im beobachteten Zeitraum befunden hat, sind aus der Matrix  $\mathcal{X}$  ersichtlich, aus der auch noch die Reihenfolge hervorgeht, in der die Orte durchlaufen wurden.

Beschreibt man einen Konzentrationsprozeß in der angegebenen Weise mit Hilfe der Quadratsummen  $q$ ,  $q_1$  und  $q_2$ , so werden die  $m$  Orte als starres System von Punkten betrachtet; die Reihenfolge,

---

<sup>1)</sup> Bezüglich der Annahme der Stetigkeit vgl. die Fußnote auf S. 89

in der die  $m$  Orte durchlaufen wurden, ist aus  $q$ ,  $q_1$  und  $q_2$  nicht mehr ersichtlich.

Bei allen Quadratsummen hat man die Möglichkeit zur anschaulichen Interpretation: jede dieser Quadratsummen stellt sich als Quadrat einer bezüglich des Diskussionsobjektes aufschlußreichen Entfernung dar. Diese Tatsache wurde bereits in Abschnitt 3.1 ausführlich erörtert.<sup>1)</sup>

Die anschauliche Erklärung, die also in gleicher Weise auch für  $q$ ,  $q_1$  und  $q_2$  möglich ist, legt, von  $q$  ausgehend eine Klasseneinteilung für alle nur denkbaren Konzentrationsprozesse nahe: man kann zwei Prozesse in die gleiche Klasse einordnen, wenn die Quadratsumme  $q$  für die beiden Prozesse gleich groß ist. Insbesondere werden dann zwei solche Prozesse in die gleiche Klasse

---

<sup>1)</sup> Wie oft in der Statistik ist es aufschlußreich, an dieser Stelle an die in der Mechanik bestehende Analogie zu diesem Sachverhalt zu denken:  $q$  stellt in der Mechanik das Gesamtträgheitsmoment des starren Punktesystems  $P_1, \dots, P_n$  bezüglich  $\bar{P}$  dar, wobei angenommen werden muß, daß alle Punkte mit der Masse 1 belegt seien (vgl. z.B. Kreyszig, a.a.O., S.88). Die in dieser Arbeit dargestellte Quadratsummenaufteilung hat dann als mechanisches Analogon den Satzesatz der Trägheitsmomente, der folgendes besagt: Gesamtträgheitsmoment des Systems bezüglich  $\bar{P}$  = Gesamtträgheitsmoment des Systems bezüglich seines Schwerpunktes +  
+ Trägheitsmoment des Schwerpunktes bezüglich  $\bar{P}$ .

eingearordnet, für die die Punkte  $P_i$  auf ein- und derselben Hyperkugel um  $\bar{P}$  liegen. Dabei stellt es einen Sonderfall dar, wenn die Punkte  $P_i$  so auf der Hyperkugel liegen, daß die Koordinaten jeweils gleich, in der Reihenfolge jedoch vertauscht sind.

Mit der Klassifizierung nach  $q$  ist jedoch zunächst nur eine grobe Einteilung möglich; die zusätzliche Betrachtung von  $q_1$  und  $q_2$  erlaubt auf Grund der in 3.1 erörterten Eigenschaften eine differenziertere Einteilung. Damit beschäftigt sich der folgende Abschnitt.

### 3.4 Die Beurteilung von Konzentrationsprozessen

mit Hilfe von  $q$ ,  $q_1$  und  $q_2$

Nachdem in 3.2 die Extrema für  $q$ ,  $q_1$  und  $q_2$  bestimmt wurden, liegt es nahe, zur Beurteilung eines Konzentrationsprozesses für die zugehörige Matrix  $\mathcal{K}$   $q_1$  und  $q_2$  sowie deren Summe  $q$  zu berechnen und diese numerischen Werte den zugehörigen Extrema gegenüberzustellen. Bei einem derartigen Vorgehen muß man sich aber der Tatsache bewußt sein, die schon mehrfach erörtert wurde: auch von  $q$ ,  $q_1$  und  $q_2$  können keine eindeutigen Rückschlüsse auf die Eigenart des untersuchten Konzentrationsprozesses gezogen werden, weil man bei der Charakterisierung von  $\mathcal{K}$  durch  $q_1$  und  $q_2$  auf Informationen verzichtet; welche Komponenten eines Konzentrationsprozesses mit  $q_1$  und  $q_2$  erfaßt werden, ist in Abschnitt 3.1 erörtert worden. Auf die an dieser Stelle dargelegten Möglichkeiten zur anschaulichen Interpretation sei nochmals hingewiesen bevor im folgenden bestimmte Spezialfälle für  $q_1$  und  $q_2$  untersucht werden sollen, um die Grenzen des Diskussionsbereiches abzustecken.

Sowohl bezüglich  $q_1$  als auch bezüglich  $q_2$  muß unterschieden werden, ob die zugehörigen Zahlenwerte sehr nahe bei Null liegen oder sich nahe bei einem der in 3.1 und 3.2 ermittelten Maxima befinden. Das Problem, "nahe bei" im konkreten Fall zu quantifizieren, ist dabei am besten zu lösen, wenn man für zwei Konzentrationsprozesse  $\mathcal{K}^I$  und  $\mathcal{K}^{II}$ , wobei  $m$  und  $n$  für  $\mathcal{K}^I$  und  $\mathcal{K}^{II}$  gleich sein müssen,  $q_1^I$  und  $q_2^I$

den entsprechenden Zahlenwerten  $q_1^{II}$  und  $q_2^{II}$  gegenüberstellt (vgl. nachfolgende Zahlenbeispiele, insbes. S. 122 - 124). Der Unterscheidung von  $q_1$  und  $q_2$  entsprechend, sollen vier Fälle, die schematisch in der untenstehenden Vierfeldertafel erfaßt sind, genauer betrachtet werden.

| $q_1 \backslash q_2$     | $\approx 0$ | $\approx \text{maximal}$ |
|--------------------------|-------------|--------------------------|
| $\approx 0$              | 1. Fall     | 2. Fall                  |
| $\approx \text{maximal}$ | 3. Fall     | 4. Fall                  |

1. Fall:  $q_1 \approx 0$  bedeutet anschaulich, daß der "Schwerpunkt"  $\bar{P}$  der Punkteschar  $P_1, \dots, P_m$ , als der sich der Weg des Konzentrationspunktes in der Matrix darstellt,<sup>1)</sup> nahe bei  $\bar{P}$ , dem "Schwerpunkt" der Konzentrationshyperebene, befindet: für die

---

<sup>1)</sup> vgl. 3.1

"durchschnittliche statische Konzentration" über  $m$  Zeitpunkte bedeutet das "Nichtkonzentration" bzw. Verhältnisse, die der Nichtkonzentration nahe kommen.  $q_2 \approx 0$  bedeutet, in gleicher Weise wie  $q_1$  anschaulich interpretiert, daß die Punkte  $P_i$  nahe bei  $\bar{P}$  liegen. Daraus folgt aber auch, daß die Entfernungen der  $P_i$  untereinander gering sein müssen.

Damit ist der 1. Fall durch die geringen Entfernungen der  $P_i$  zu  $\bar{P}$  und von  $\bar{P}$  zu  $\bar{\bar{P}}$  charakterisiert: gleich, ob die Entwicklung so war, daß sich der Konzentrationspunkt annähernd auf einer Hyperkugel (mit sehr kleinem Durchmesser) bewegte oder ob die Bewegung auf einen Rand bzw. zu einer Ecke der Hyperfläche hin erfolgte, wegen der geringen Entfernungen wird man der Reihenfolge, in der die  $P_i$  durchlaufen wurden ebenso wie der Richtung des Weges des Konzentrationspunktes nur eine geringe Bedeutung zumessen. Fall 1 ist damit typisch für einen Konzentrationsprozeß, bei dem im Zeitablauf jeweils Nichtkonzentration im Sinn des Konzentrationsstandes erhalten geblieben ist.

2. Fall:  $q_1$  nahe einem Maximum heißt, daß  $\bar{P}$  weit entfernt von  $\bar{\bar{P}}$  liegen muß, d.h. in einer bzw. nahe bei einer Ecke oder auch nahe einem

Rand der Konzentrationshyperfläche.

Dieser 2. Fall ist wegen  $q_2 \approx 0$  charakterisiert durch das Vorherrschen eines starken statischen Elements der Konzentration: die große Entfernung zwischen  $\bar{P}$  und  $\bar{\bar{P}}$  ist ein Zeichen dafür, daß wenigen Merkmalsträgern ein vergleichsweise großer Anteil am Gesamtmerkmalsbetrag zuzuordnen war, wobei im Zeitablauf nur geringe Schwankungen zu registrieren waren.

Wie im 1. Fall ist auch hier der Konzentrationsstand annähernd gleich geblieben. Ein kleiner Wert für  $q_2$  ( $q_2$  nahe bei Null) weist also auf geringe Dynamik des betrachteten Prozesses hin.

Nachfolgende Tabelle mit fiktivem Zahlenmaterial soll zur Erklärung und auch als Vergleichsbasis zum Fall 3 dienen.

$$x^{II}$$

| $m \backslash n$ | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1                | 0,02 | 0,2  | 0,06 | 0,01 | 0,06 | 0,03 | 0,55 | 0,01 | 0,03 | 0,03 |
| 2                | 0,01 | 0,2  | 0,06 | 0,01 | 0,04 | 0,02 | 0,60 | 0,03 | 0,02 | 0,01 |
| 3                | 0,01 | 0,27 | 0,02 | 0,01 | 0,02 | 0,02 | 0,58 | 0,02 | 0,03 | 0,02 |
| 4                | 0,02 | 0,22 | 0,02 | 0,01 | 0,04 | 0,03 | 0,55 | 0,01 | 0,05 | 0,05 |
| 5                | 0,02 | 0,27 | 0,03 | 0,06 | 0,02 | 0,01 | 0,57 | 0,01 | 0,02 | 0,06 |

$$\begin{aligned}
 q_1^{\min} &= 0,0 & q_2^{\min} &= 0,0 \\
 q_1^{II} &= 0,2823 & q_2^{II} &= 0,01537 \\
 q_1^{\max} &= 0,45 & q_2^{\max} &= 4,0
 \end{aligned}$$

(Die hochgestellte II soll andeuten, daß es sich um ein Beispiel zum 2. Fall handelt.)

3. Fall: Auch hier sei wieder die anschauliche Interpretation an den Anfang gestellt:

$q_1$  nahe bei Null bedeutet, daß in

$\sum_j (\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2$  sehr kleine Beträge für

$(\bar{x}_{.j} - \frac{1}{n})^2$  ( $j = 1, \dots, n$ ) eingehen, d.h.

$\bar{P}$  nahe beim "Nichtkonzentrationspunkt"  $\bar{\bar{P}}$  liegt. Dies ist möglich, man vergleiche dazu oben unter 3.2.1 und 3.2.2, sowohl bei einer Lage der  $P_i$  relativ entfernt von  $\bar{\bar{P}}$  als auch dann, wenn sich die  $P_i$  nahe um  $\bar{\bar{P}}$  gruppieren. (Hierbei ist die Anzahl der in  $\mathcal{K}$  erfaßten Zeitpunkte  $t_i$ , mithin die Anzahl der  $P_i$  zu beachten, vgl. oben 3.2.2).

$q_2$  bietet die Möglichkeit zur Differenzierung: da  $q_2$  groß ist, müssen die vom Konzentrationspunkt durchlaufenen Punkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) weit entfernt von  $\bar{\bar{P}}$  liegen, da in

$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$  große Beträge für

$\sum_j (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2$  vorkommen müssen. Ist  $q_2$

maximal, (für  $m = k \cdot n$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ) so kann man eindeutig die Aussage machen, daß die  $P_i$  in den Ecken der Konzentrationshyperfläche liegen (vgl. 3.2.2)

Ist für die Prozesse, die man betrachtet,  $q_1$  nahe Null und  $q_2$  groß, aber nicht maximal, so muß man sich bewußt sein, daß es sich dabei doch um sehr verschiedene Prozesse

handeln kann, obwohl sie nach der  $q_1/q_2$ -Klassifizierung der gleichen Klasse zugehören:

Da aus  $q_2$ , wie in 3.3 erörtert, keine Information über die Reihenfolge, in der die  $P_i$  durchlaufen wurden, entnommen werden kann, bringt es eine Konzentrationsanalyse, die ausschließlich auf  $q_1$  und  $q_2$  aufbaut, mit sich, daß darunter Teilfälle subsummiert werden, die konzentrationsanalytisch durchaus unterschiedlich zu beurteilen sind; dazu 2 Beispiele:

#### Beispiel a)

$q_2$  ist verhältnismäßig groß, weil unter den beteiligten Merkmalsträgern im Zeitablauf Umschichtungen bezüglich der Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag eingetreten sind, wobei der Konzentrationsstand zu jedem Zeitpunkt zumindest annähernd gleichgeblieben ist.

Der Konzentrationspunkt hat sich also in diesem Fall auf einer Hyperkugel bewegt, deren Mittelpunkt  $\bar{P}$  nahe bei  $\bar{\bar{P}}$  liegt. Ein Zahlenbeispiel soll diesen Fall erläutern:

$\mathcal{R}^{III/a}$

| $m \backslash n$ | 1           | 2    | 3           | 4    | 5    | 6    | 7    | 8           | 9           | 10          |
|------------------|-------------|------|-------------|------|------|------|------|-------------|-------------|-------------|
| 1                | 0,10        | 0,12 | <u>0,23</u> | 0,05 | 0,07 | 0,08 | 0,03 | 0,13        | 0,10        | 0,09        |
| 2                | 0,08        | 0,12 | 0,12        | 0,06 | 0,05 | 0,08 | 0,05 | <u>0,24</u> | 0,11        | 0,09        |
| 3                | 0,09        | 0,10 | 0,13        | 0,03 | 0,08 | 0,05 | 0,05 | 0,13        | <u>0,22</u> | 0,12        |
| 4                | 0,15        | 0,11 | 0,10        | 0,04 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,10        | 0,12        | <u>0,20</u> |
| 5                | <u>0,21</u> | 0,09 | 0,09        | 0,06 | 0,05 | 0,08 | 0,06 | 0,09        | 0,15        | 0,12        |

$$q_1^{\min} = 0,0$$

$$q_2^{\min} = 0,0$$

$$q_1^{III/a} = 0,014$$

$$q_2^{III/a} = 0,06$$

$$q_1^{\max} = 0,45$$

$$q_2^{\max} = 4,0$$

(III/a hochgestellt soll andeuten, daß es sich um Beispiel a) zum 3. Fall handelt)

Damit wird man einen Prozeß, wie ihn obiges Beispiel a) darstellt, gegenüber Prozessen, die dem 2. Fall zuzuordnen sind, konzentrationsanalytisch positiver beurteilen, denn erstgenannte Prozesse weisen zwar einen hohen Konzentrationsstand auf, den aber kein Merkmals-träger zu seinen Gunsten aufrechterhalten konnte.

Im Vergleich mit dem Zahlenbeispiel zu Fall 2 ist es von Interesse, daß  $q_1^{III/a}$  etwa  $\frac{1}{20}$  von  $q_1^{II}$  ist, während  $q_2^{III/a}$  etwa viermal so groß wie  $q_2^{II}$  ist.

Beispiel b)

$q_2$  kann aber ebenfalls groß sein, weil die großen Entfernungen zwischen den  $P_i$  und  $\bar{P}$  dadurch entstanden sind, daß der Konzentrationspunkt sich von seiner Ausgangslage im Zeitablauf in eine gewisse Extremlage bewegt hat, wobei die Bewegung in einer Weise erfolgte, daß zum Zeitpunkt zu dem  $q$  berechnet wurde,  $\bar{P}$  sich nahe bei  $\bar{P}$  befand:

III/b  
x

| m \ n | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1     | 0,06 | 0,16 | 0,12 | 0,03 | 0,04 | 0,12 | 0,13 | 0,16 | 0,13 | 0,05 |
| 2     | 0,08 | 0,13 | 0,18 | 0,02 | 0,06 | 0,09 | 0,14 | 0,11 | 0,12 | 0,07 |
| 3     | 0,09 | 0,10 | 0,20 | 0,06 | 0,09 | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,08 | 0,14 |
| 4     | 0,15 | 0,11 | 0,22 | 0,08 | 0,06 | 0,06 | 0,05 | 0,09 | 0,09 | 0,09 |
| 5     | 0,14 | 0,04 | 0,28 | 0,09 | 0,10 | 0,04 | 0,06 | 0,04 | 0,08 | 0,13 |

$$q_1^{\min} = 0$$

$$q_2^{\min} = 0$$

$$q_1^{\text{III/b}} = 0,014$$

$$q_2^{\text{III/b}} = 0,061$$

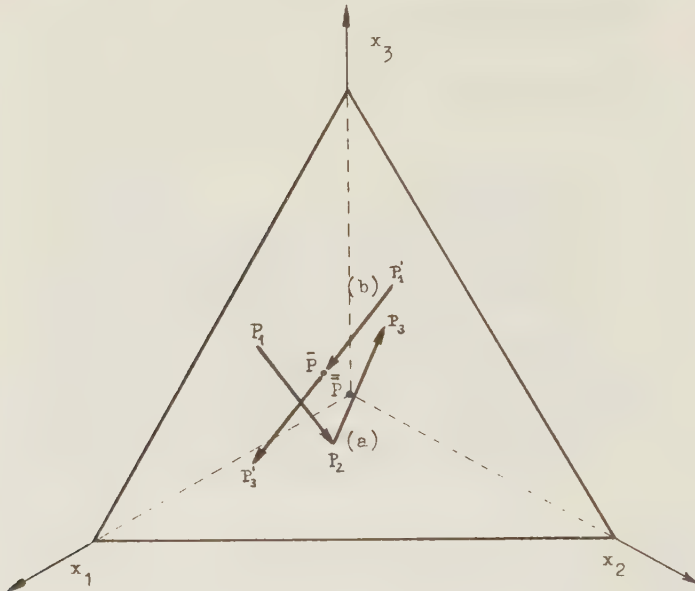
$$q_1^{\max} = 0,45$$

$$q_2^{\max} = 4,0$$

(III/b hochgestellt soll andeuten, daß es sich um das Beispiel b zum 3. Fall handelt)

In obigem Zahlenbeispiel hat der 3. Merkmalsträger seinen Anteil im Zeitablauf mehr als verdoppeln können, ohne daß man mit Hilfe von  $q_1$  und/oder von  $q_2$  dazu Informationen bekommen hätte, vielmehr ist  $q_1^{III/a} = q_1^{III/b}$  und  $q_2^{III/a} = q_2^{III/b}$ .

Für  $n = 3$  Merkmalsträger läßt sich ein Vorgang wie in Beispiel a) und in Beispiel b) wie folgt anschaulich darstellen:



- (a) vergleichbar mit Beispiel a
- (b) vergleichbar mit Beispiel b

Die Gegenüberstellung von  $\mathcal{X}^{III/a}$  und  $\mathcal{X}^{III/b}$  zeigt also die Grenzen dynamischer Konzentrationsmessung mit Hilfe der Aufteilung von Quadratsummen. Die Unmöglichkeit, zwischen  $\mathcal{X}^{III/a}$  und  $\mathcal{X}^{III/b}$  zu differenzieren, erscheint aufs erste ein nicht unerheblicher Nachteil der hier betrachteten Methode. Dieser Nachteil läßt sich jedoch auf recht einfache Weise vermeiden, indem man  $q_1$  nicht nur global für die gesamte Matrix  $\mathcal{X}$  berechnet, sondern als  $q_1(t)$  jeder Zeile von  $\mathcal{X}$  entsprechend ermittelt. Das bedeutet, anschaulich interpretiert, daß man den Weg des Punktes  $\bar{P}$  in die Analyse mit einbezieht: für III/a muß sich  $\bar{P}$  ebenso wie der Konzentrationspunkt auf einer Hyperkugel um  $\bar{P}$  bewegen, denn der Konzentrationsstand bleibt ja im Zeitablauf erhalten. Für III/b dagegen muß sich  $q_1(t)$  im Zeitablauf völlig anders entwickelt haben:  $\bar{P}$  muß sich von der Ausgangslage auf  $\bar{P}$  zubewegt haben und dementsprechend muß  $q_1(t)$  eine abnehmende Funktion der Zeit sein. Zu einem Kriterium mit besonderer Bedeutung sind damit Distanzen und ihre zeitabhängige Entwicklung geworden. Eine eingehende Untersuchung der Bedeutung von Distanzen als Grundlage für dynamische Konzentrationsmessung soll daher im 4. Kapitel angestellt werden.

4. Fall:  $q_1$  und  $q_2$  maximal bedeutet sowohl große Entfernungen der  $P_i$  von  $\bar{P}$ , als auch große Entfernung von  $\bar{P}$  zu  $\bar{\bar{P}}$ . Das kann aber wegen der Nebenbedingungen

$$\sum_j x_{ij} = 1 \text{ und } 0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ nicht ein-}$$

treten. Der 4. Fall ist also auszuschließen. Man vergleiche dazu oben unter 3.2.2, Seite 111 f.

#### 4. Distanzen als Grundlage dynamischer Konzen- trationsmessung

##### 4.1 Zur Bedeutung der Entfernung vom "Nichtkonzen- trationspunkt" <sup>1)</sup>

Über die ausgezeichnete Lage des Punktes  $\bar{P}$  mit den Koordinaten  $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  und die Bedeutung dieser Lage für statische und dynamische Konzentrationsmessung wurde bereits an mehreren Stellen dieser Arbeit gesprochen. Desgleichen sind auch über die Eckpunkte der Hyperfläche  $\sum x_{ij} = 1$  entsprechende Ausführungen gemacht worden.

Bei dynamischen Betrachtungen mit Hilfe der Quadratsummenzerlegung konnte zwar die Entwicklung über eine (beliebige) Anzahl von Zeitpunkten in die Analyse einbezogen werden,

---

<sup>1)</sup> Für die Abschnitte 4.1 sowie 4.2 wird ebenso wie im 3. Kapitel zunächst von einer im Zeitablauf konstanten Anzahl von Beteiligten ausgegangen; ebenso sollen keine Aufteilungen und/oder Verschmelzungen stattfinden.

jedoch konnte u.U. nicht zwischen einem Prozeß, bei dem sich der Konzentrationspunkt auf eine Ecke von  $\sum x_{ij} = 1$  zubewegte und einem Prozeß, bei dem der Konzentrationspunkt sich auf einer Hyperkugel um  $\bar{P}$  bewegt, unterschieden werden. Da i.a. nur ersterer als typischer Konzentrationsprozeß bezeichnet wird, ist konsequenterweise zumindest der Versuch zu einer Differenzierung zu unternehmen.

Die Konzentrationshyperfläche, beschrieben durch  $\sum x_{ij} = 1$ , stellt ein konvexes Gebilde dar;<sup>1)</sup> dies ist ein wichtiges Faktum für das weitere Vorgehen. Konvex bedeutet dabei, entsprechend dem üblichen mathematischen Begriff, daß die Verbindungsstrecke je zweier beliebiger Punkte des - konvexen - Gebildes genau in diesem Gebilde liegt. Der Begriff der Konvexität beinhaltet auch - was für den Zweck dynamischer Konzentrationsmessung von besonderem Interesse ist - daß die Eckpunkte der Hyperfläche die Punkte des (n-dimensionalen) Gebildes sind, die am weitesten von

---

<sup>1)</sup> vgl. die Definition eines konvexen Gebildes, z.B. bei Alexandroff, P. und Hopf, H.: Topologie, Berlin 1935.

$\bar{P}$  entfernt<sup>1)</sup> liegen<sup>2)</sup>).

Ein Prozeß, der sich als Zustandsänderung sukzessive vom Zustand völliger Nichtkonzentration zu vollständiger Konzentration darstellt, bedeutet eine Bewegung des zugeordneten Konzentrationspunktes  $P$ , wobei die Distanz  $P \bar{P}$  ständig zunimmt. Die größtmögliche Entfernung von  $\bar{P}$  ist dann erreicht, wenn der Konzentrationspunkt  $P$  in einem Eckpunkt der Konzentrationshyperfläche angekommen ist.

Wenn man diesen Fall eines Konzentrationsvorganges als Extremfall - vergleichbar der vollständigen Konzentration im statischen Sinn - bezeichnet und dazu benutzt, den Definitionsbereich für eine dynamische Analyse abzustecken, so gilt es in der Realität auftretende Konzentrationsvorgänge daraufhin zu untersuchen, wie sehr sie dem eben erörterten, besonders bedeutungsvollen Prototyp ähneln.

---

<sup>1)</sup> Definition der Entfernung eines Punktes  $P$  von  $\bar{P}$  s. S. 52 oben.

<sup>2)</sup> vgl. den Beweis, Selecta Mathematica III, Berlin 1971, Beispiel 1.5, S. 95/96.

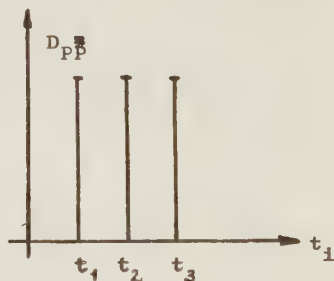
Als eine Möglichkeit derartige Untersuchungen in quantitativer Weise durchzuführen, soll im folgenden die analytische Betrachtung eines "Entfernungsspektrums" vorgeschlagen werden.

Bei einem derartigen Spektrum handelt es sich eigentlich um ein Entfernungsdigramm, das man erhält, wenn man in einem kartesischen Koordinatensystem auf der Abszisse die  $m$  Zeitpunkte der Matrix  $\mathcal{X}$  entsprechend den äquidistanten Zeitspannen durch äquidistante Punkte markiert und in Richtung der Ordinate die jeweiligen Entfernungen des Konzentrationspunktes  $P$  zu  $\bar{P}$  zu den verschiedenen Zeitpunkten  $t_i$  abträgt.

Die folgenden Abbildungen zeigen Entfernungsspektren für 4 ausgewählte Konzentrationsvorgänge  $\mathcal{X}^I - \mathcal{X}^{IV}$ :<sup>1)</sup>

I

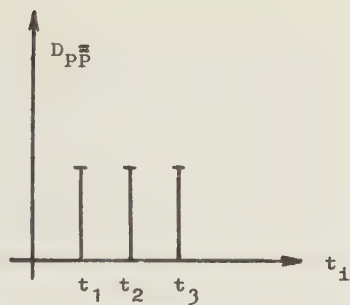
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



<sup>1)</sup>  $D_{\bar{P}P}$  wird in einer beliebigen Längeneinheit abgetragen.

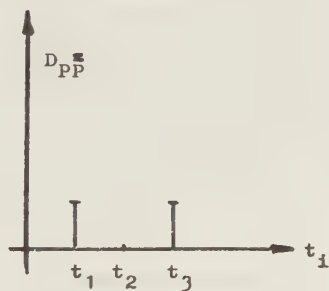
II

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



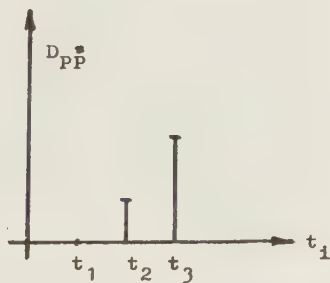
III

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$



IV

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

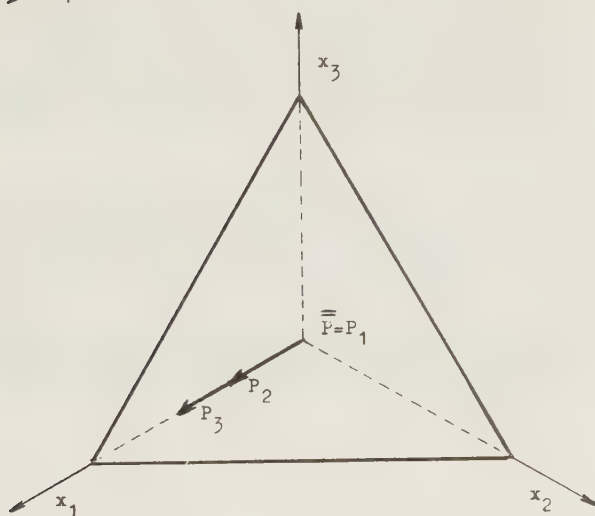
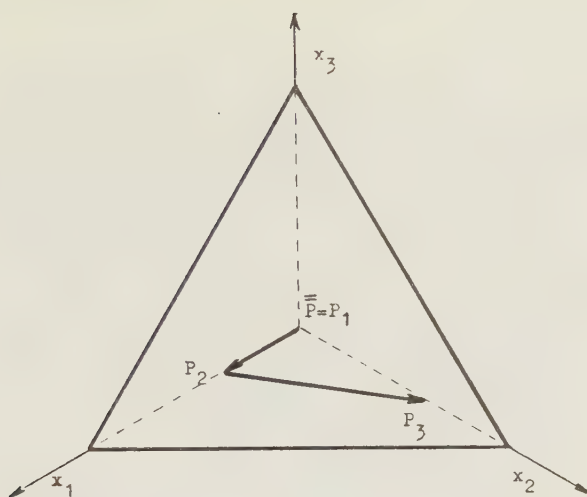


Beim Vergleich derartiger Entfernungsdiagramme muß beachtet werden, daß die Skaleneinteilungen der Abszissen übereinstimmen und ebenso die der Ordinaten. Wird diese Bedingung berücksichtigt, so kann unmittelbar durch vergleichendes Betrachten der Entfernungsdiagramme ein Vergleich der Konzentrationsprozesse vorgenommen werden. Damit scheint das Entfernungsdiagramm aufs erste ein ebenso einfaches wie aussagefähiges Mittel zur Darstellung typischer Konzentrationsprozesse zu sein, von Entwicklungen also, die von  $\bar{P}$  weg- und auf einen Eckpunkt der Hyperebene

$\sum x_{ij} = 1$  zu führen. Denn für typische Konzentrationsvorgänge werden die "Spektrallinien" im Zeitablauf immer länger, was man als Kennzeichen für derartige Prozesse werten könnte.

Eine derartige Bewertung muß aber vorläufig bleiben, denn, wie man sich leicht überlegt, kann aus dem Entfernungsdiagramm nicht entnommen werden, ob die Entwicklung kontinuierlich auf ein und denselben Eckpunkt hin erfolgt, oder ob die Richtung der Bewegung wechselt. Ein Hinweis auf diese Problematik ergibt sich aus den obigen Diagrammen zu  $\alpha^I$ ,  $\alpha^{II}$ ,  $\alpha^{III}$  und  $\alpha^{IV}$ .

Für den dreidimensionalen Fall ( $n = 3$  Merkmals-träger) soll diese Schwierigkeit nochmals ausführlicher durch nachfolgende Abbildungen dargestellt werden.

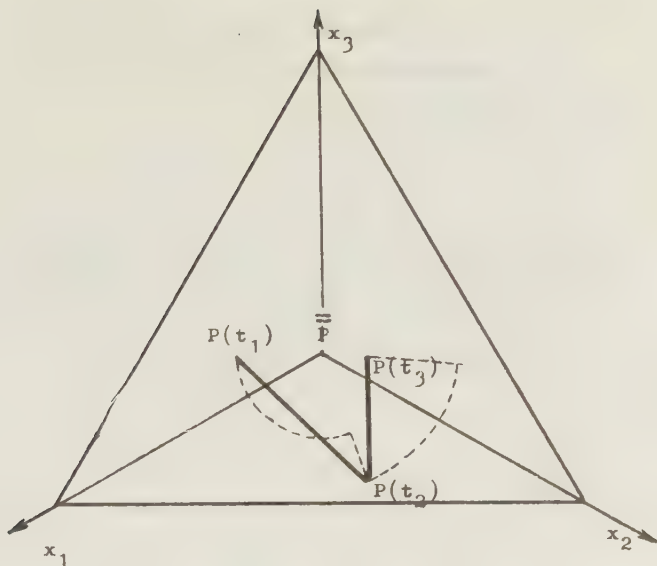


Zur Überwindung dieser Schwierigkeiten ist es sinnvoll, folgenden Gedankengang einzuführen: da ein Prozeß, dessen Dynamik auf die Bewegung des Konzentrationspunktes auf einer Hyperkugel um  $\bar{P}$  zurückzuführen ist, aus naheliegenden Gründen von einem Prozeß wie dem in  $\mathcal{K}^{IV}$  dargestellten zu unterscheiden ist, kann man auf konsequente Weise so vorgehen, daß man jede Bewegung auf der Hyperfläche  $\sum x_{ij} = 1$  in zwei Komponenten trennt, was in 4.2 im einzelnen ausgeführt werden soll:

1. Eine Rotationskomponente: sie erfaßt die im Sinne eines "typischen Konzentrationsprozesses" neutrale Komponente des dynamischen Vorgangs, nämlich den Teil, der sich durch die Bewegung des Konzentrationspunktes  $P$  auf einer Hyperkugel um  $\bar{P}$  erklären ließe.

2. Eine Radialkomponente: damit wird der Bewegungsteil bezeichnet, der gradlinig von  $\bar{P}$  weg- oder hinführt.

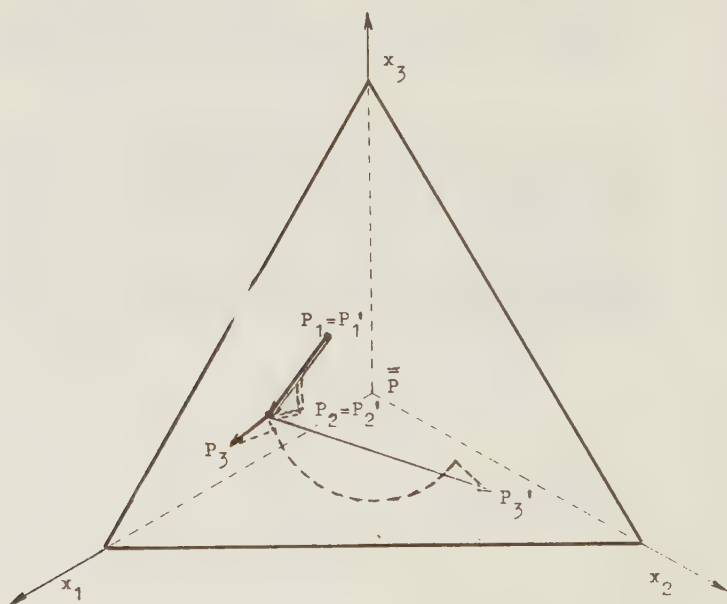
Superposition dieser beiden Bewegungen ergibt die ursprünglich beobachtete Bewegung der Punkte  $P_i$ .



Die Bedeutung der soeben vorgeschlagenen Zerlegung der Bewegung des Konzentrationspunktes  $P$  in zwei Komponenten, sowie Möglichkeiten, derartige Zerlegungen für quantitative Darstellungen nutzbar zu machen, sollen in den folgenden Abschnitten erörtert werden.

#### 4.2 Die Zerlegung der Bewegung des Konzentrationspunktes in Rotations- und Radialbewegung.

Zur Illustration sei ein Beispiel für  $n = 3$  Merkmalsträger an den Anfang der Ausführungen gestellt. Wie oben wird dabei die Draufsicht gezeichnet und zwei Prozesse I ( $P_1, P_2, P_3$ ) und II ( $P_1', P_2', P_3'$ ) mit gleichem  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  ( $i = 1, 2$ ) einander gegenübergestellt:



Betrachtet werden zwei Entwicklungen I und II, wie sie in obiger Abbildung dargestellt sind: offensichtlich<sup>1)</sup> - man vergleiche in 4.1 - ist beiden Prozessen das gleiche Entfernungsspektrum zuzuordnen. Dennoch ist II - obwohl zum Zeitpunkt  $t_2$  die statische Konzentration für I und II gleich ist - die größere Dynamik zuzuordnen, wenn zur Messung der Dynamik z.B. die Quadratsumme  $q_2$  herangezogen wird. In obigem Beispiel ist das auch leicht daran zu sehen, daß der Konzentrationspunkt beim Prozeß II einen weit größeren Weg als beim Prozeß I zurückgelegt hat und zwar im gleichen Gesamtzeitraum.

Bei Zerlegung der Bewegung in der zu Ende des Abschnittes 4.1 und in obiger Abbildung dargestellten Weise in Rotations- und Radialkomponente ist die Differenz in  $q_2$  darauf zurückzuführen, daß der Rotationsteil an der Bewegung im Prozeß II wesentlich größer ist als im Prozeß I.

Nun könnte man davon ausgehen, daß Konzentrationsvorgänge, deren Dynamik allein auf die Rotationskomponente zurückzuführen ist - Bewegungen des Konzentrationspunktes auf ein und derselben Hyperkugel um  $\bar{P}$  - keine Konzentrationsprozesse im eigentlichen Sinne darstellen, da dabei das Niveau der statischen Konzentration im Zeitablauf gleich bleibt (vgl. auch die einführenden Überlegungen in Abschnitt 1.1). Bei dieser

---

<sup>1)</sup>  $D_{P_3\bar{P}} = D_{P'_3\bar{P}}$

Betrachtungsweise könnte man die Hyperkugeln, auf denen sich die Bewegung vollzieht, in geeigneter Weise als eine Art "Äquipotentialfläche", als geometrischer Ort aller Punkte mit gleicher statischer Konzentration bezeichnen.<sup>1)</sup>

Daher muß das Interesse vor allem solchen Prozessen gelten, bei denen die Dynamik in der Entwicklung ausschließlich oder zumindest vor allem auf die radiale Bewegungskomponente zurückzuführen ist, denn offensichtlich handelt es sich dabei um "typische" Konzentrationsprozesse: Veränderung der Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag vorwiegend zugunsten eines bzw. einiger weniger Merkmalsträger. Als Beispiel dazu vergleiche man wieder die obige Abbildung.

Nach dem bisher Gesagten ist offensichtlich, daß eine Trennung der gesamten Bewegung des Konzentrationspunktes auf der Konzentrationshyperebene in Radial- und Rotationskomponente aufschlußreich ist. Es erhebt sich aber damit zwangsläufig auch die Frage nach den Möglichkeiten zur quantitativen Erfassung dieser Komponenten.

Zur Darstellung der Radialkomponente wurde in 4.1 das "Entfernungsspektrum" als einfaches und ausreichendes Mittel dargestellt. Damit bleibt das Problem, eine ähnlich einfache Darstellungs-

---

<sup>1)</sup> Zur Interpretation vgl. Abschnitt 3.4, S. 122

form für die Komponente der Rotationsbewegungen zu finden.

Zur korrekten Erfassung der Rotationskomponente müßte man wie folgt vorgehen: man legt in die  $n$ -dimensionale Konzentrationshyperebene ein  $n - 1$  dimensionales Koordinatensystem mit  $\bar{P}$  als Ursprung (und eventuell so, daß eine Koordinate durch einen Eckpunkt geht; dies ist aber nicht notwendig, sondern vor allem aus rechen-technischen Gründen günstig).

Dieses  $n - 1$  dimensionale Koordinatensystem spannt die Hyperebene auf. Die Lage des Konzentrationspunktes für jeden Zeitpunkt  $t_1$  könnte dann in gleicher Weise wie in der Matrix  $\mathcal{K}$  durch die Angabe des Abstands vom Koordinatenursprung  $\bar{P}$  und  $n - 2$  Winkeln zu den Koordinatenachsen des o.a.  $n - 1$  dimensionalen Koordinatensystems angegeben werden.<sup>1)</sup>

Der Abstand von  $\bar{P}$  wird im Entfernungsspektrum erfaßt, aus der Veränderung der Winkel könnte man ersehen, welches Gewicht der Rotationskomponente zuzumessen ist.

---

<sup>1)</sup> Es handelt sich dabei um den Übergang von kartesischen zu Polarkoordinaten, vgl. Bronstein, I. und Semendjajew, K. a.a.O. S. 185 ff unter Verallgemeinerung vom dreidimensionalen Fall auf den allgemeinen  $n$ -dimensionalen Fall.

Die quantitative Erfassung der Radialkomponente mit Hilfe des Entfernungsspektrums und die Erfassung der Rotationskomponente mit Hilfe der Angabe der  $n - 2$  Winkel und ihrer Veränderungen würde es ermöglichen, den Konzentrationsprozeß ohne Informationsverlust zu beschreiben. Bezüglich der Rotationskomponente sind aber damit sehr umständliche Berechnungen verbunden. Insgesamt wird also der Prozeß nur in einer besonderen Weise dargestellt und keine eigentliche Verdichtung der in der Matrix  $\mathcal{Z}$  enthaltenen Informationen über den Prozeß gewonnen.

An dieser Stelle kann an Ausführungen im 2. Kapitel angeknüpft werden. In Abschnitt 2.1.2 wurde bei der Erörterung von Grossack's Verfahren zur komparativ-statischen Konzentrationsmessung bereits auf die Bedeutung der Entfernung der  $P_i$  von  $\bar{P}$  eingegangen; der Quotient aus zwei derartigen Distanzen bildet ja die eine Komponente der Koeffizienten  $K_{Gr}$  (vgl. S. 43 ff.). Die zweite Komponente war der Cosinus des Winkels  $\gamma$ , um den bei Vergleich von zwei Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  die Strecke  $\bar{P}P_1$  gedreht wird, bis sie mit der Strecke  $\bar{P}P_2$  zusammenfällt.

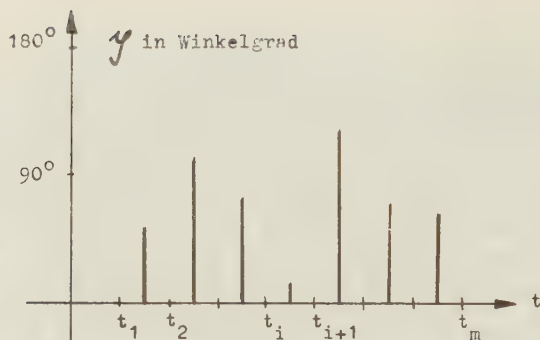
$$\cos \gamma_{i,i+1} = \frac{\sum_j (x_{ij} - \frac{1}{n}) \cdot (x_{i+1,j} - \frac{1}{n})}{\sqrt{\sum_j (x_{ij} - \frac{1}{n})^2 \cdot \sum_j (x_{i+1,j} - \frac{1}{n})^2}}$$

Dieser Winkel  $\gamma$  läßt sich nun auch hier zur Quantifizierung der Rotationskomponente verwenden; dabei ist jedoch daran zu denken, daß  $\gamma$  bzw.  $\cos \gamma$  keine Angaben mehr darüber erlauben, in welcher zweidimensionalen Ebene des  $\mathbb{R}^n$  diese Drehung erfolgt ist, es kann also aus  $\gamma$  nicht mehr geschlossen werden, welche Merkmalsträger durch die "Umschichtungen" der Merkmalsbeträge erfaßt wurden und wie sich die Umschichtungen im einzelnen ausgewirkt haben.

Für eine Analyse eines Konzentrationsprozesses, die sich in der bisher betrachteten Weise mit Radial- und Rotationskomponente befaßt, ist es im Rahmen einer globalen Auswertung der Matrix  $\mathcal{K}$  bezüglich der Rotationskomponente bereits aufschlußreich zu wissen, ob Rotationsbewegungen im Zeitablauf überhaupt stattfanden oder ob das nicht der Fall war; zur Erfassung und Darstellung des Winkels  $\gamma$  und seiner Veränderung im Zeitablauf kann etwa - ähnlich dem Entfernungsspektrum bei der Radialkomponente - ein Diagramm dienen, das folgende Form aufweist:<sup>1)</sup>

---

<sup>1)</sup> Da nicht mehr ersichtlich ist, in welcher zweidimensionalen Ebene des  $\mathbb{R}^n$  die Drehung vor sich ging, ist es auch unwesentlich aufzuzeigen, in welcher Richtung die Drehung erfolgte; somit kann man sich beim Wertebereich von  $\gamma$  auf den Bereich von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  beschränken.

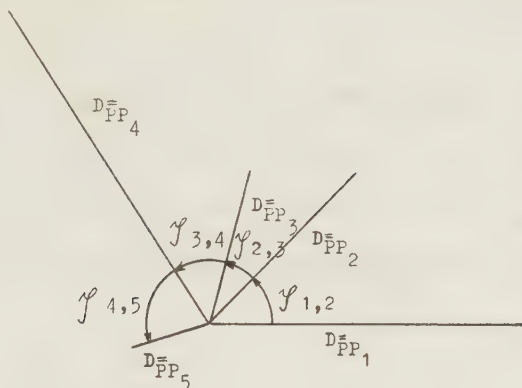


Die Höhe der über der Mitte<sup>1)</sup> der Strecke  $t_i - t_{i+1}$  abgetragenen Stäbe gibt dabei die Auskunft wie sich  $\gamma$  innerhalb des betreffenden Zeitraums verändert hat.

Entfernungsspektrum und Spektrum des Rotationswinkels  $\gamma$  für den gesamten in der Matrix enthaltenen Zeitraum  $t_1$  bis  $t_m$  ermöglichen dann eine Beurteilung eines Konzentrationsprozesses im Sinne einer dynamischen Analyse. Man kann auch zur Vereinfachung versuchen, die beiden bisherangeführten Darstellungsformen - Entfernungsspektrum und Spektrum des Rotationswinkels  $\gamma$  - in einem Diagramm zu vereinen, wobei nur die Absolutbeträge der Entfernungen und der Winkelmaße zum Tragen kommen:

<sup>1)</sup> Daß die Mitte der Strecke  $t_i - t_{i+1}$  gewählt wurde, soll lediglich verdeutlichen, daß man sich die Drehung als zwischen den Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$  erfolgt vorstellen muß.

Beispiel:



Hierbei werden also die Winkel  $\gamma_{i,i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) von einer beliebigen fest vorgegebenen Achse entgegen dem Uhrzeigersinn fortlaufend abgetragen; an den Achsen der Winkel wird die jeweilige Entfernung des zugehörigen Konzentrationspunktes  $P_i$  von  $\bar{P}$  eingezeichnet.

Zur Erläuterung der praktischen Anwendbarkeit dieser eben besprochenen Darstellungsformen werden nachfolgend die entsprechenden Diagramme zu Beispiel a) und b) auf Seite 123 bzw. 125 dieser Arbeit dargestellt:

Man erhält zunächst folgende Werte:

Beispiel a)

$$D_{PP_1} = 0,164 \quad \cos \gamma_{1,2} = 0,535 \quad \gamma_{1,2} = 57^{\circ}40'$$

$$D_{PP_2} = 0,167 \quad \cos \gamma_{2,3} = 0,485 \quad \gamma_{2,3} = 61^{\circ}0'$$

$$D_{PP_3} = 0,164 \quad \cos \gamma_{3,4} = 0,538 \quad \gamma_{3,4} = 57^{\circ}30'$$

$$D_{PP_4} = 0,146 \quad \cos \gamma_{4,5} = 0,710 \quad \gamma_{4,5} = 45^{\circ}15'$$

$$D_{PP_5} = 0,146$$

Beispiel b)

$$D_{PP_1} = 0,150 \quad \cos \gamma_{1,2} = 0,678 \quad \gamma_{1,2} = 47^{\circ}20'$$

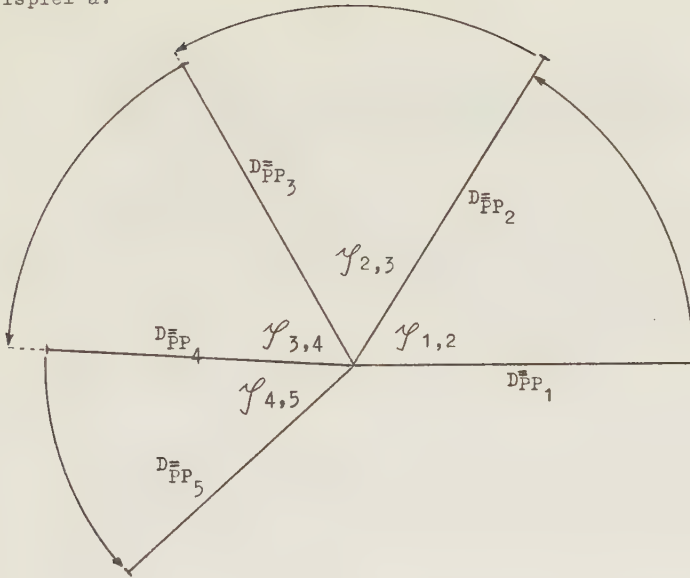
$$D_{PP_2} = 0,137 \quad \cos \gamma_{2,3} = 0,638 \quad \gamma_{2,3} = 50^{\circ}20'$$

$$D_{PP_3} = 0,135 \quad \cos \gamma_{3,4} = 0,761 \quad \gamma_{3,4} = 40^{\circ}25'$$

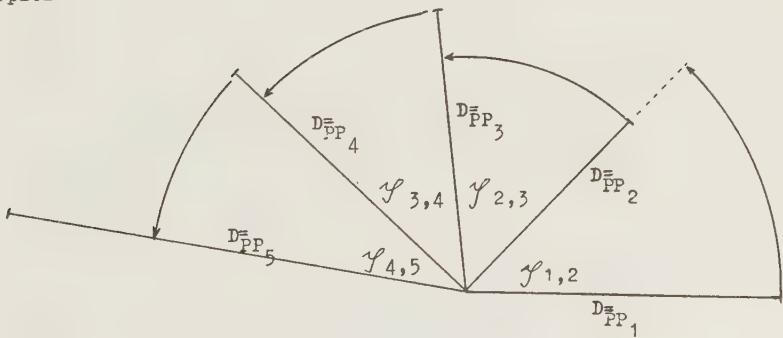
$$D_{PP_4} = 0,153 \quad \cos \gamma_{4,5} = 0,837 \quad \gamma_{4,5} = 33^{\circ}10'$$

$$D_{PP_5} = 0,220$$

Beispiel a:



Beispiel b:



Längenmaßstab bei den Diagrammen: 1 : 4

Man denke hierbei daran, daß für diese beiden Prozesse der gleiche Wert für  $q_1$  und  $q_2$  errechnet wurde und damit, nach der  $q_1/q_2$  Klassifizierung, diese zwei Prozesse in die gleiche Klasse einzuordnen waren. Obige Darstellungsformen legen dagegen schon auf Grund des Augenscheins eine Unterscheidung nahe.

#### 4.3 Möglichkeiten zur Einbeziehung von $n$ als zeitlich variabler Größe sowie Erfassung des Parameters $n_0$ .

Wie in den einleitenden Abschnitten des 1. Kapitels eingehender diskutiert, werden in den Parametern  $n = n(t)$  und  $n_0 = n_0(t)$  wesentliche Komponenten eines Konzentrationsprozesses erfaßt.

Die relativ einfache Methode der Darstellung von Konzentrationsprozessen mit Hilfe von Distanzen als Beurteilungskriterium bietet nun auch die Möglichkeit  $n$  und  $n_0$  zumindest indirekt in die Analyse einzubeziehen.

Bei der Untersuchung realer Konzentrationsprozesse wird man zumeist davon ausgehen können, daß die auf Grund sachlogischer Überlegungen zu rechtfertigende Entscheidung über die Größe von  $n_0$  so ausfallen wird, daß man  $n_0$  für einen im Hinblick auf den Unternehmungsgegenstand längeren Zeitraum als konstant annimmt; bei  $n_0 = n_0(t)$  würde es sich dementsprechend um eine Stufenfunktion mit Sprungstellen bei meist unterschiedlich langen Zeitintervallen handeln.

Bei der Darstellung von Konzentrationsprozessen mit Hilfe von Entfernungsspektren muß man von diesen Zeitintervallen, innerhalb derer  $n_0$  konstant ist ausgehen: mit der Entscheidung über  $n_0$  ist die Dimension des dem Konzentrationsprozeß zugrundeliegenden

Koordinatensystems getroffen.<sup>1)</sup>

Die Entwicklung der Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag für die insgesamt  $n_0$  Merkmalsträger wird dann im vollen Umfang in der Matrix  $\mathcal{X}$  erfaßt. Fiktiven Merkmalsträgern wird dabei der Anteil 0 zugeordnet. Ebenso bleiben innerhalb des untersuchten Zeitraums Merkmalsträger, deren Anteil im Zeitablauf auf Null zurückgegangen ist, bis zum Endzeitpunkt  $t_m$  mit dem Anteil 0 in der Grundgesamtheit erhalten.

Sowohl fiktive Merkmalsträger als auch "Abgänger" werden bei der Berechnung des Entfernungsspektrums mit dem Anteil 0 berücksichtigt. Wie wirkt sich nun  $n = n(t)$  als zeitlich variable Größe unter diesen Bedingungen aus?

Es sei  $D_{P\bar{P}}^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_0} (x_j - \bar{x})^2}$  die Entfernung des Konzentrationspunktes  $P$  von  $\bar{P}$  in einem  $n_0$  - dimensionalen Koordinatensystem; analog sei  $D_{P\bar{P}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}$  für das  $n$ -dimensionale Koordinatensystem definiert,

---

<sup>1)</sup> Dabei muß dann natürlich  $n_0 \geq n$  gelten. Da dies aber für alle praktisch interessierenden Fälle gegeben sein dürfte, sei  $n_0 \geq n$  als stets gültig angenommen.

wobei die Dimension als zeitabhängig anzusehen ist.<sup>1)</sup>  
In  $D_{\overline{P}\overline{P}}^0$  seien also  $n_0 - n$  Merkmalsträger mit dem Anteil  $x_j = 0$  ( $j = n+1, \dots, n_0$ ) am Gesamtmerkmalsbetrag enthalten.

Die Definitionsgleichungen für  $D_{\overline{P}\overline{P}}^0$  bzw.  $D_{\overline{P}\overline{P}}$  lassen sich leicht umformen, so daß man

$$D_{\overline{P}\overline{P}}^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_0} x_j^2 + \frac{1}{n_0}} \quad \text{und} \quad D_{\overline{P}\overline{P}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2 + \frac{1}{n}}$$

erhält. Da immer

$$\sum_{j=1}^{n_0} x_j^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad \text{lassen sich die Beziehungen zwischen } D_{\overline{P}\overline{P}}^0 \text{ und } D_{\overline{P}\overline{P}} \text{ an Hand des nachfolgenden}$$

Ausdrucks darstellen, den man nach einigen Umformungen aus den Definitionsgleichungen erhält:

$$(D_{\overline{P}\overline{P}}^0)^2 = (D_{\overline{P}\overline{P}})^2 - \frac{n_0 - n}{n_0 \cdot n}$$

---

1) Bei  $D_{\overline{P}\overline{P}}^0$  und  $D_{\overline{P}\overline{P}}$  wurde, da die Betrachtungen für einen bestimmten Zeitpunkt  $t_i$  erfolgen, der Einfachheit der Darstellung halber auf eine zeitliche Indizierung verzichtet.

Da vorausgesetzt wurde, daß  $n_0 \gg n$  ( $n_0 > 0$ ,  $n > 0$ ) ist  $D_{PP}^0 \gg D_{PP}$ . Insofern kann man also feststellen, daß sich eine zurückgehende Anzahl von Merkmalsträgern bei Benutzung eines Entfernungsspektrums als dynamischem Konzentrationsmaß bei der Ermittlung der Distanzen auswirkt. Allerdings ist zu bedenken, daß der Unterschied zwischen  $D_{PP}^0$  und  $D_{PP}$  sowohl von  $n_0$  und  $n$  absolut, als auch von der Differenz zwischen  $n_0$  und  $n$  abhängt. Nimmt also z.B. bei  $m = 50$  Meßpunkten und  $n_0 = 500$  Merkmalsträgern  $n$  von  $n(t_0) = n_0 = 500$  auf  $n(t_{50}) = 450$  Merkmalsträger ab, scheidet also pro Meßpunkt ein Merkmalsträger aus, so ist

$$\frac{n_0 - n(t_1)}{n_0 \cdot n(t_1)} = \frac{500 - 499}{500 \cdot 499}$$

also sehr sehr klein.

Auch zu  $t_{50}$  erhält man für  $\frac{n_0 - n(t_{50})}{n_0 \cdot n(t_{50})}$  lediglich den

Betrag von  $\frac{500 - 450}{500 \cdot 450}$ , also einen sehr kleinen Betrag, mit dem sich die Abgänge auf die Distanz als dynamisches Konzentrationsmaß auswirken.

Um diesen Nachteil zu kompensieren, gibt es mehrere Möglichkeiten. Denkbar ist z.B. die Einführung eines Gewichtungsfaktors um Differenzen zwischen  $n_0$  und  $n$  stärker zum Tragen zu bringen, auch wenn  $n_0$  und  $n$  verhältnismäßig groß sind. Des Weiteren ist z.B. eine separate Betrachtung der Funktion  $n = n(t)$ , wie sie z.B. G r o s s a c k bei seinem Verfahren vornimmt, durchaus aufschlußreich.

#### 4.4 Zusammenfassung: der Gedanke der Gültigkeits- bereiche

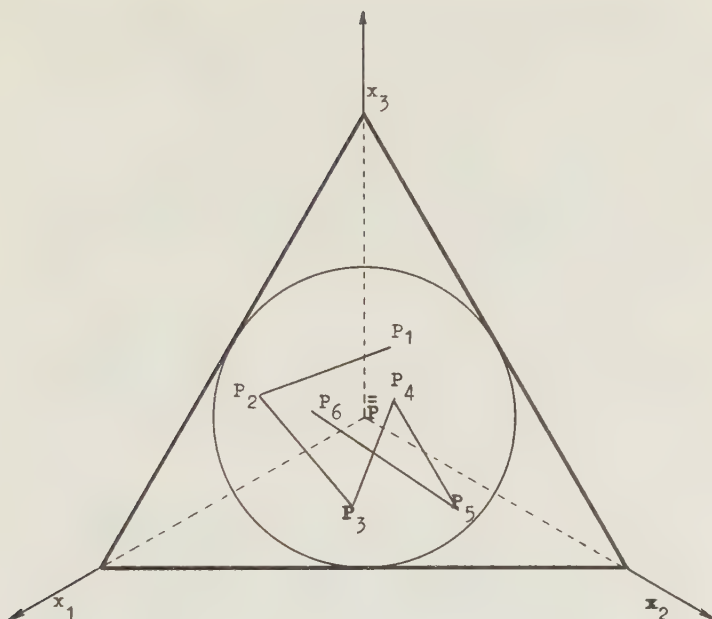
Die im Laufe dieser Arbeit angestellten Untersuchungen zur Möglichkeit Konzentrationsprozesse quantitativ darzustellen, müssen stets von dem Gesichtspunkt der im ersten Kapitel ausführlich behandelten Problematik gesehen werden: die exakte und in jeder Hinsicht befriedigende Darstellung von Konzentrationsprozessen kann nur mit Hilfe einer Vektorfunktion wie  $\mathcal{V}(t)$  geschehen.

Da daher jede der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden der dynamischen Konzentrationsmessung durch die Art der Abbildung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^1$  zwangsläufig Informationsverluste mit sich bringen muß, liegt der Gedanke nahe, je nach Lage des Interesses eine Auswahl unter den verschiedenen sich bietenden Möglichkeiten zu treffen bzw. verschiedene Methoden zu kombinieren, um so Informationslücken zu füllen.

Die Möglichkeit, bestimmte Nachteile eines Verfahrens durch Vorteile eines anderen Verfahrens zumindest zu kompensieren besteht, wenn man sich bewußt ist, wo sich die verschiedenen Methoden überschneiden, wo sie sich ergänzen und innerhalb welcher Bereiche die Aussagen, die mit Hilfe solcher Methoden gemacht werden, überhaupt gültig sind.

In diesem Sinne sind, wie in 3.4 angedeutet, das 3. und 4. Kapitel dieser Arbeit gemeinsam und als sich gegenseitig ergänzend zu sehen, was sich auch an den im 4. Kapitel wieder aufgenommenen Beispielen des 3. Kapitels gezeigt hat.

Eine weitere Überlegung, die in diesem Zusammenhang anzustellen ist, gilt der Abgrenzung eines Bereichs, innerhalb dessen man sich mit der Aussagekraft eines Konzentrationsmaßes zufrieden geben kann. Zu denken ist etwa an ein eng begrenztes Gebiet, weil dort die Verschiebung in den Anteilen am Gesamtmerkmalsbetrag unter den in die Analyse einbezogenen Merkmalsträgern relativ klein ist. So könnte man z.B. im 3-dimensionalen Fall (also für  $n = 3$ ) als solchen Bereich das Innere des Inkreises des Konzentrationsdreiecks ansehen, weil bei Bewegungen des Konzentrationspunktes innerhalb dieses Kreises kein Rand der Konzentrationsebene erreicht werden kann (vgl. Abb. Seite 155).



Wenn sich alle Punkte  $P_i$  eines Konzentrationsprozesses bei  $n = 3$  Merkmalsträgern innerhalb des Inkreises der Konzentrationsfläche befinden, so bedeutet das wirtschaftlich interpretiert, daß im ganzen betrachteten Zeitablauf kein Merkmalsträger verdrängt worden ist, und daß kein Merkmalsträger ein besonderes Übergewicht über die restlichen Merkmalsträger bekommen hat. In einem Entfernungsdiagramm, wie in 4.3 eingeführt, ist in diesem Fall keine "Spektrallinie" länger als der Radius dieses Inkreises.

Obiges gilt analog für den allgemeinen  $n$ -dimensionalen Fall ( $n$  Merkmalsträger). Hier stellt der beschriebene Bereich die größte  $(n-1)$ -dimensionale Hyperkugel um  $\bar{P}$  dar, die noch ganz im Innern der Konzentrationshyperebene liegt.<sup>1)</sup> Ihr Radius berechnet sich als der Abstand etwa des Punktes  $(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0)$  vom Punkt  $\bar{P}$  und beträgt

$$\xi = \sqrt{(n-1) \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n}}$$

Für den oben betrachteten 3-dimensionalen Fall

ist also  $\xi = \sqrt{\frac{1}{6}}$ .

Ob alle  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) eines betrachteten Konzentrationsprozesses tatsächlich im Innern der beschriebenen Hyperkugel liegen, läßt sich leicht an Entfernungsdiagramm ersehen, wenn man in dieses eine Parallele zur Abszisse im Abstand

$\sqrt{\frac{1}{(n-1)n}}$  einzeichnet und alle eingezeichneten Distanzen unterhalb dieser horizontalen Linie enden.

---

<sup>1)</sup> vgl. hierzu Ausführungen über konvexe Körper des  $\mathcal{R}^n$  in Alexandroff, P. und Hopf, H., a.a.O., S. 599 ff.

## 5. Ansätze zu einem Erklärungsmodell für Konzen- trationsprozesse.

Wie in der Einleitung zum 1. Kapitel bereits erwähnt, soll in diesem letzten Kapitel versucht werden, ein - wenn auch einfaches - Modell zu entwickeln, das es erlaubt, Konzentrationsvorgänge zu erklären.

Die Bedeutung eines solchen Modells läßt sich an den Möglichkeiten ermessen, die dieses Modell demjenigen bietet, der Konzentrationsvorgänge analysieren will: falls mit Hilfe dieses Modells der Verlauf eines Konzentrationsprozesses erklärt werden kann, hat man damit die Möglichkeit zur Darstellung und Prognose des weiteren Verlaufs auf Grund eines Kausalzusammenhangs. Damit ist die Chance gegeben, nicht nur über das "Wie" eines Konzentrationsvorganges Aussagen machen zu können, sondern auch Gründe für die Art, in der sich ein Prozeß entwickelt hat, anzugeben.

Das Modell, das in den folgenden Abschnitten zur Erklärung von Konzentrationsprozessen entwickelt wird, baut auf dem Modell des Abschnittes 1.1 auf, ist sonst jedoch völlig neu. Es kann daher hier nur insofern überprüft werden, als es in sich widerspruchsfrei sein muß. Hinsichtlich seiner Anwendbarkeit können hier nur erste, allgemeine Überlegungen angestellt werden, die hypothetisch

bleiben, solange das Modell nicht an der Praxis  
überprüft ist. Insoweit sollte also dieses  
5. Kapitel nur Anregungen geben und die Grund-  
lage für eine weitere Diskussion bilden.

### 5.1 Die Erfassung des Verhaltens der Merkmalsträger

Bei den bisher angestellten Überlegungen zu den Möglichkeiten dynamischer Konzentrationsmessung wurde stets ein Kollektiv anonymer Merkmalsträger und die zeitlich variable Aufteilung eines Gesamtmerkmalsbetrags auf dieses Kollektiv als Gegenstand einer Konzentrationsanalyse angenommen. Wenn nun der Versuch unternommen werden soll, ein Erklärungsmodell für Konzentrationsprozesse zu erstellen, so muß mit den sehr allgemeinen Begriffen Merkmalsträger und Merkmalsbetrag ein konkreterer, wenn auch idealisierter und von der Realität abstrahierter Inhalt verbunden werden.

In diesem Kapitel soll unter einem Merkmalsträger eine Unternehmung im Sinne der Betriebswirtschaftslehre verstanden werden, also eine Wirtschaftseinheit, die ihren "Wirtschaftsplan auf der Basis der gegebenen Marktsituation selbst bestimmen kann"<sup>1)</sup> und "deren Erwägungen und Entscheidungen für andere Marktbeteiligte zu Daten werden und die ihrerseits selbständig auf Datenänderungen reagiert"<sup>2)</sup>. In unmittelbarem Zusammenhang mit diesen charakteristischen Eigenschaften ist zu beachten, daß diese Entscheidungen stets im Hinblick auf ein oder meist mehrere

---

<sup>1)</sup> Wöhe, G., Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Berlin und Frankfurt a.M., 1964, S.6

<sup>2)</sup> Rittershausen, H., Wirtschaft (Fischer-Lexikon), Frankfurt a.M., 1966, S.39

Ziele getroffen werden. "Es bedarf keiner ausführlichen Begründung, daß das Entscheidungsergebnis vom jeweiligen Zielinhalt und der Art der Zielformulierung abhängt."<sup>1)</sup> Die möglichen Unternehmensziele sind in neuerer Zeit zunehmend zum Gegenstand der betriebswirtschaftlichen Forschung geworden. Empirische Untersuchungen haben ebenso wie theoretische Überlegungen die Bedeutung einer Reihe von Zielvorstellungen für unternehmerische Entscheidungen ergeben<sup>2)</sup>. Als eines der wichtigsten Ziele hat sich dabei das Umsatzstreben herausgestellt<sup>3)</sup>. Als Gründe für die Bedeutung des Umsatzstrebens wird u.a. angeführt: vergleichsweise einfache und eindeutige Ermittlung der Höhe des Umsatzes; die Umsatzentwicklung wird als Ausdruck für den Markterfolg angesehen; häufig versuchen Unternehmer "über einen möglichst großen Umsatz auch einen möglichst großen Gewinn zu erzielen"<sup>4)</sup>.

Im Hinblick auf Konzentrationsprozesse ist jedoch besonders das Umsatzstreben in seiner relativen Form von Interesse: "Bei relativem Umsatzstreben gehen zusätzlich bestimmte Bezugsgrößen in die Zielformulierung ein. Einmal kann der von der Unternehmung

---

<sup>1)</sup> Heinen, E., Das Zielsystem der Unternehmung, Wiesbaden 1966

<sup>2)</sup> vgl. Heinen, E., a.a.O., insbes. S.34-44

<sup>3)</sup> vgl. Heinen, E., a.a.O. S.64-67, mit Hinweisen auf Baumol W.J., Schneider E., Ott A.E. u.a.

<sup>4)</sup> Heinen, E., a.a.O. S.66

erstrebte Umsatz auf den insgesamt in einer Branche erzielten bzw. für eine Produktart erzielbaren Umsatz bezogen werden. Eine solchermaßen präzierte Zielsetzung wird als Streben nach Marktanteilen bezeichnet... In zahlreichen Unternehmungen wird der Marktanteil als Zielgröße absatz- und investitionspolitischer Entscheidungen berücksichtigt. Dafür spricht auch die Aufmerksamkeit, mit der die Entwicklung des Marktanteils ... in ... Geschäftsberichten verfolgt und außerhalb der Unternehmung als bedeutsamer Hinweis auf die bestehende Situation betrachtet wird."<sup>1</sup>) Zielinhalt ist dabei - so das Ergebnis empirischer Untersuchungen - die Aufrechterhaltung oder Verbesserung des Marktanteils<sup>2</sup>). Die Beachtung sowohl der angeführten theoretischen Überlegungen als auch der Ergebnisse empirischer Untersuchungen läßt es daher plausibel scheinen, hinter dem Begriff Merkmalsbetrag bei Konzentrationsanalysen ein quantitatives Merkmal wie den Umsatz zu sehen.<sup>3</sup>) Damit soll betont werden, daß es für die folgenden Ausführungen als wichtig angesehen wird, daß Merkmalsbeträge Kriterium für Entscheidungen und Verhalten von Merkmalsträgern sind, wie es z.B. bei der Wirtschaftseinheit Unternehmung in Bezug auf den Umsatz der Fall ist.

---

<sup>1</sup>) Heinen, E., a.a.O., S.66

<sup>2</sup>) Kaplan, A.D.H., Dirlam, J.B., und Lanzilotti, R.F., Pricing in Big Business, Washington 1958, S.128

<sup>3</sup>) Zur Problematik der Definition geeigneter statischer Merkmale bei Konzentrationsanalysen siehe Kellerer, H. und Schaich, E., a.a.O. S.7

In der in dieser Arbeit benutzten Terminologie wird damit in der Matrix  $U$  die Verteilung z.B. der Umsätze, in der Matrix  $X$  die daraus resultierenden Marktanteile erfaßt. Bei der Entwicklung eines Erklärungsmodells für Konzentrationsprozesse vor diesem Hintergrund geht es somit darum, unternehmenspolitische Entscheidungen bezüglich des Ziels "Marktanteil" implizit in das Modell einzubeziehen.

Selbstverständlich gilt für das im folgenden zu entwickelnde Modell ebenso wie für das Modell des Abschnitts 1.1, daß versucht wird, in diesem Modell eine ganz bestimmte Struktur zu erfassen, die das Beziehungsgefüge der wirtschaftlichen Realität in vereinfachter Form wiedergibt. Die Objekte des Modells sind dabei nicht identisch mit den realen Dingen, die sie repräsentieren, vielmehr gilt, daß die Beziehungen zwischen den Objekten des Modells isomorph sind zu den Beziehungen, die zwischen den realen Gegenständen (für die die Gegenstände des Modells Repräsentanten sind) bestehen.

Um also, wie oben angegeben, unternehmenspolitische Entscheidungen bezüglich des Ziels "Marktanteil" in das Modell einzubringen, sei folgendes vorgeschlagen: neben der Koordinate  $x_j$  wird jedem der  $n$  Merkmalsträger eine Größe  $k_j$  zugeordnet. Mit dieser Größe  $k_j$  sollen alle Anstrengungen erfaßt werden, die ein Merkmalsträger bezüglich seiner Zielgröße Merkmalsbetrag unternimmt,

also z.B. alle Bemühungen einer Unternehmung um Erhaltung oder Vergrößerung des Marktanteils. In  $k_j$  wird damit z.B. die Fülle an Möglichkeiten, die durch das absatzwirtschaftliche Instrumentarium geboten wird, ebenso repräsentiert wie weniger quantifizierbare Dinge, z.B. die Fähigkeiten des Managements oder Qualität der Belegschaft u.ä. Da sich die Bemühungen, die durch  $k_j$  dargestellt werden, also ausschließlich darauf richten, die Entwicklung der Zielgröße, d.h. des dem Merkmalsträger zugeordneten Merkmalsbetrags, zu beeinflussen, soll  $k_j$  als vektorielle Größe aufgefaßt werden, die in Richtung der  $x_j$ -Koordinate wirkt und die man sich als am Konzentrationspunkt angreifend vorstellen muß, also sozusagen wie eine Kraft, die am Konzentrationspunkt in Richtung der  $x_j$ -Achse zieht.<sup>1)</sup> Somit soll mit Hilfe der Größe  $k_j$  im Modell erfaßt werden, wie der Merkmalsträger  $j$  versucht, sowohl auf den Ort des Konzentrationspunktes als auch auf seine Bewegung nach

---

<sup>1)</sup> Bei Abbildungen wird im folgenden dieser Analogie zur Physik Rechnung getragen: die Größen  $k_j$  werden graphisch ähnlich dargestellt wie in der Physik Kräfte gezeichnet werden, nämlich als Vektorpfeile.

Richtung und Geschwindigkeit Einfluß zu nehmen.

Bezüglich der Größen  $k_j$  sind nun weiter eine Reihe von Annahmen möglich; je nachdem welche Annahmen man über das Verhalten der Merkmals-träger trifft, ist es z.B. denkbar,  $k_j$  als Funk-tion in einer der folgenden Formen anzusetzen:

$$k_{ij} = k_{ij} \left[ k_{i1}, \dots, k_{i,j-1}, k_{i,j+1}, \dots, k_{in}; \psi(t_{i-1}) \right]$$

kann z.B. zum Ausdruck bringen, daß die Anstren-gungen einer Unternehmung zu  $t_i$  in Bezug auf ihren Marktanteil von den Anstrengungen ihrer Mitbewer-ber und von der Verteilung der Marktanteile in der Vorperiode abhängt. Auf diesem Ansatz aufbauend, aber noch komplexer könnte gesetzt werden:

$$k_j(t) = k_j \left[ k_1(t), \dots, k_{j-1}(t), k_{j+1}(t) \dots k_n(t); \right. \\ \left. \psi(t), \frac{d}{dt} \psi(t), \frac{d^2}{dt^2} \psi(t) \right].$$

Hierbei wird angenommen, daß  $k_j$  eine zeitabhän-gige Größe ist, die außerdem noch von den zeit-lich variablen Größen  $k_l$  ( $l = 1, \dots, n; l \neq j$ ) sowie vom Ort, von der Geschwindigkeit mit der sich der Konzentrationspunkt bewegt, sowie von der Änderung dieser Geschwindigkeit abhängt.

Es ist selbstverständlich, daß die Größe  $k_j$ , in der eine ganze Reihe von Tatbeständen erfaßt werden soll, nicht in der Weise quantifizierbar ist, daß sie in einer Maßeinheit gemessen werden könnte. Dagegen scheint es, im Rahmen der bisher angestellten Überlegungen, doch durchaus möglich, diese Größen  $k_j$  in eine Ordnung der Art  $k_{j_1} \gg k_{j_2} \gg \dots \gg k_{j_n}$  zu bringen und in dieser Weise zum Ausdruck zu bringen, wie sich die Anstrengungen des  $j$ -ten Merkmalsträgers bezüglich der Zielvariablen  $x_{ij} = \frac{a_{ij}}{A_i}$  im Vergleich zu den ebenso gelagerten Anstrengungen der übrigen  $n-1$  Merkmalsträger verhält.

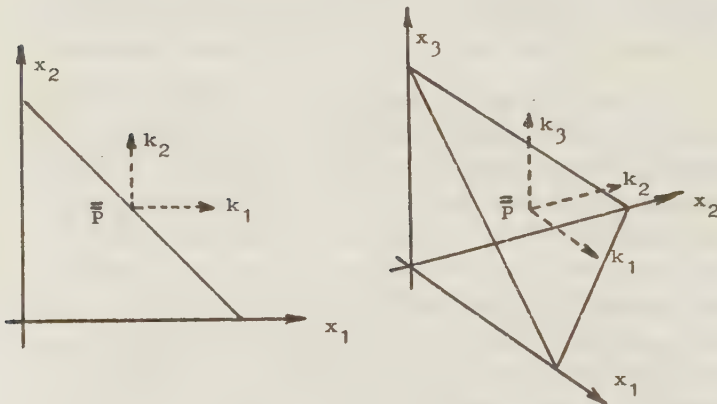
Für die in den folgenden Abschnitten angestellten Überlegungen soll angenommen werden, daß dem Konzentrationspunkt keine Eigendynamik zuzuschreiben ist. Diese Annahme stimmt insofern mit der Realität überein, als sie bezüglich des Konzentrationspunktes nichts anderes bedeutet, als daß dieser von der Lage  $\rho(t_1)$  in die Lage  $\rho(t_2)$  nur unter der Einwirkung der Größen  $k_j$  übergeht: der Konzentrationspunkt ändert also seinen Bewegungszustand, der durch Richtung des zurückgelegten Weges und Geschwindigkeit bestimmt ist, nur unter der Einwirkung des Vektors  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_j, \dots, k_n)$ . Um Aussagen darüber machen zu können, wie sich der Bewegungszustand ändert, soll - um das Modell nicht von Anfang an zu kompliziert aufzubauen -

weiter angenommen werden, daß unter dem Einfluß von  $k_j$  eine Änderung im Geschwindigkeitsvektor

$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$  eintritt, d.h. eine Änderung im Vektor  $\vec{k}$  bewirke eine Änderung die proportional zur Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit des Konzentrationspunktes ist. Der Einfachheit halber sei der Proportionalitätsfaktor mit 1 angesetzt. Damit erhält man als grundlegende Verhaltensgleichung:

$$k_j = \ddot{x}_j(t).$$

Diese Verhaltensgleichung soll Grundlage sein zur Ermittlung der Bewegungsgleichung  $\vec{v}(t)$ .



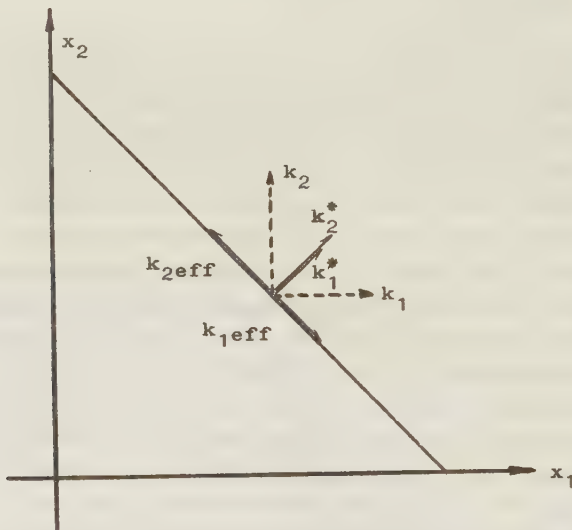
## 5.2 Die Funktion $\varphi(t)$ im zwei- und dreidimensionalen Fall.

Wie in 5.1 erörtert, ist es, um das Verhalten der Merkmalsträger zu charakterisieren, notwendig, Angaben über den Vektor  $\vec{k}$  zu machen. Den komplexen, zum Teil beschränkt rationalen Verhaltensweisen realer Merkmalsträger entspräche wohl eine ebenso komplexe funktionale Beziehung zwischen den Komponenten des Vektors  $\vec{k}$ . Am Anfang der Entwicklung eines Erklärungsmodells soll aber, schon aus rechentechnischen Gründen, bezüglich des Verhaltens der in die Analyse einzubeziehenden Merkmalsträger stark vereinfachte Annahmen gemacht werden. Man mag diese Annahmen als unrealistisch ansehen; dabei ist aber zu bedenken, daß ihnen nur beispielhafter Charakter zukommt. Wesentlich ist vor allem, daß aufbauend auf den in 5.1 erörterten Möglichkeiten zur Erfassung des Verhaltens, ein neuer Weg der Analyse von Konzentrationsprozessen gegangen werden soll. Er soll unmittelbar zur Bestimmung der Funktion  $\varphi(t)$  führen.

Bevor in den nächsten Abschnitten die Bewegungsgleichungen für den n-dimensionalen Fall, also für n Merkmalsträger entwickelt werden, sollen zunächst Untersuchungen für nur 2 und 3 Merkmalsträger angestellt werden; damit bietet sich die Möglichkeit, einen einfacheren Zugang zu dem Modell zu finden, da die räumliche Vorstellung zu Hilfe genommen werden kann.

### 5.2.1 Die Funktion $\psi(t)$ für zwei Merkmalsträger

---



Der Vektor  $\vec{k}$  charakterisiere in der in 5.1 dargestellten Art das Verhalten der beiden Merkmalsträger. Die Komponenten des Vektors seien konstante Größen  $k_1$  und  $k_2$ ;  $k_1$  und  $k_2$  sind dementsprechend unabhängig von der Zeit, unabhängig voneinander und unabhängig vom Ort des Konzentrationspunktes zu Beginn der Analyse. In bezug auf eine Unternehmung interpretiert hieße das, daß die beiden in die Analyse einbezogenen Merkmalsträger ihre Anstrengungen bezüglich des Unternehmensziels Marktanteil ein für alle Mal fixiert hätten. Die folgenden Ausführungen werden zeigen, welchen Verlauf der Konzentrationsprozeß unter diesen Voraussetzungen nimmt.

Zunächst gilt es, aus  $\vec{k} = (k_1; k_2)$  den Vektor  $\vec{k}_{\text{eff}} = (k_{1\text{eff}}; k_{2\text{eff}})$  abzuleiten, da wegen der Bedingung  $x_1 + x_2 = 1$  der Teil des Vektors  $\vec{k}$ , der in Richtung der Normalen zur Geraden  $x_1 + x_2 = 1$  wirkt, nicht zur Geltung kommt. Der Teil des Vektors  $\vec{k}$ , der senkrecht zu  $G \equiv x_1 + x_2 = 1$  wirkt, werde mit  $\vec{k}^* = (k_1^*; k_2^*)$  bezeichnet.  $\vec{k}^*$  hat dabei die gleiche Richtung wie der Normalenvektor  $\vec{u} = (1; 1)$ , der senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden  $G$  ist. Durch Normierung von  $\vec{u}$  erhält man  $\vec{u}_0 = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ . Um die Länge des Vektors  $\vec{k}^*$  zu bestimmen, d.h. um die Länge der Projektion von  $\vec{k}$  auf die Richtung von  $\vec{u}_0$  zu erhalten, bildet man das Skalarprodukt aus den Vektoren  $\vec{k}$  und  $\vec{u}_0$ .

$$|\vec{k}^*| = \vec{k} \cdot \vec{u}_0 = k_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + k_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}}$$

Den Vektor  $\vec{k}^*$  erhält man als Produkt von  $|\vec{k}^*|$  und  $\vec{u}_0$ :

$$\begin{aligned} \vec{k}^* &= |\vec{k}^*| \cdot \vec{u}_0 = \left( \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \left( \frac{k_1 + k_2}{2} ; \frac{k_1 + k_2}{2} \right) \end{aligned}$$

Da sich, wie oben dargelegt  $\vec{k}$  als Summe von  $\vec{k}^*$  und  $\vec{k}_{\text{eff}}$  zusammensetzt, erhält man für  $\vec{k}_{\text{eff}}$ :

$$\vec{k}_{\text{eff}} = \vec{k} - \vec{k}^* ;$$

$$\begin{aligned} \vec{k}_{\text{eff}} &= \left( k_1 - \frac{k_1+k_2}{2} ; k_2 - \frac{k_1+k_2}{2} \right) = \\ &= \left( \frac{k_1-k_2}{2} ; \frac{k_2-k_1}{2} \right) \end{aligned}$$

Da  $\vec{k}_{\text{eff}}$  allein am Konzentrationspunkt wirksam wird geht sie auch allein in die Bewegungsgleichung ein. Demgemäß erhält man:

$$\ddot{\mathcal{U}}_2(t) = \vec{k}_{\text{eff}}$$

Komponentenweise geschrieben ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{k_1-k_2}{2}$$

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{k_2-k_1}{2}$$

Dieses System von Differentialgleichungen löst man unter Zuhilfenahme folgender Anfangsbedingungen: zum Zeitpunkt  $t = 0$  befinde sich der Konzentrationspunkt im Ort  $\mathcal{U}(t_0) = (x_{01}, x_{02})$  und habe die Geschwindigkeit  $\dot{\mathcal{U}}(t_0) = (0;0)$ . Diese Anfangsbedingungen stellen insofern keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, als sie stets durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems herzustellen sind.

Nach der ersten Integration findet man:

$$\dot{x}_1(t) = \int \ddot{x}_1(t) dt + A_{01} = \frac{k_1 - k_2}{2} t + A_{01}$$

$$\dot{x}_2(t) = \int \ddot{x}_2(t) dt + A_{02} = \frac{k_2 - k_1}{2} t + A_{02}$$

Unter Ausnutzung der Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$A_{01} = A_{02} = 0$$

Erneute Integration führt zu:

$$x_1(t) = \frac{k_1 - k_2}{4} t^2 + A_{11}$$

$$x_2(t) = \frac{k_2 - k_1}{4} t^2 + A_{12}$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung  $\varphi(t_0) = \varphi^0 = (x_{01}, x_{02})$  erhält man schließlich, da

$$A_{11} = x_{01} \text{ und } A_{12} = x_{02},$$

die beiden Beziehungen:

$$x_1(t) = \frac{k_1 - k_2}{4} t^2 + x_{01}$$

$$x_2(t) = \frac{k_2 - k_1}{4} t^2 + x_{02}.$$

Damit hat man die Funktion  $\varphi(t)$  für 2 Merkmals-träger erhalten:

$$\varphi(t) = \left( \frac{k_1 - k_2}{4} t^2 + x_{01}, \frac{k_2 - k_1}{4} t^2 + x_{02} \right)$$

### 5.2.2 Die Funktion $\varphi(t)$ für drei Merkmalsträger

---

Zur Bestimmung der gesuchten Funktion  $\varphi(t)$  verfährt man für 3 Merkmalsteilnehmer ganz ähnlich wie im vorigen Abschnitt.

Ausgangspunkt ist wieder der Vektor  $\vec{k}$ , der in  $\vec{k}^*$  und  $\vec{k}_{\text{eff}}$  zerlegt wird:  $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$

Es gilt

$$|\vec{k}^*| = \vec{k} \cdot \vec{u}_0 = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{k}^* = \left( \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}, \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}, \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \right);$$

$$\vec{k}_{\text{eff}} = \vec{k} - \vec{k}^*$$

$$= \left( \frac{2k_1 - k_2 - k_3}{3}, \frac{2k_2 - k_1 - k_3}{3}, \frac{2k_3 - k_1 - k_2}{3} \right).$$

Da  $\varphi(t) = \vec{k}_{\text{eff}}$

erhält man für  $\varphi(t)$  unter Zugrundelegung der gleichen Anfangsbedingungen wie im obigen Abschnitt schließlich nach zweimaliger Integration:

$$x_1(t) = \frac{2k_1 - k_2 - k_3}{6} t^2 + x_{10}$$

$$x_2(t) = \frac{2k_2 - k_1 - k_3}{6} t^2 + x_{20}$$

$$x_3(t) = \frac{2k_3 - k_1 - k_2}{6} t^2 + x_{30}$$

### 5.3 Verallgemeinerung auf n Dimensionen

Nach den Ausführungen in den beiden vorigen Abschnitten ist es nicht schwer, die Funktion  $\varphi(t)$  für den Fall von n Merkmalsträgern zu bestimmen.

$\vec{k}$  hat n Komponenten

$$k = (k_1, \dots, k_j, \dots, k_n)$$

$$|\vec{k}^*| = \vec{k} \cdot \vec{w}_0 = \frac{\sum_{j=1}^n k_j}{\sqrt{n}}$$

$$\vec{k}^* = \left( \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^n k_j}{n}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^n k_j}{n}}_{n\text{-mal}} \right)$$

$$\vec{k}_{\text{eff}} = \vec{k} - \vec{k}^* =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{nk_1 - \sum_{j=2}^n k_j}{n} \\ \frac{nk_2 - \sum_{j=2}^n k_j}{n} \\ \vdots \\ \frac{nk_n - \sum_{j=1}^{n-1} k_j}{n} \end{bmatrix} \quad *)$$

---

\*) nur aus Platzgründen als Spaltenvektor geschrieben.

Aus  $\ddot{\varphi}(t) = \vec{k}_{\text{eff}}$  findet man bei gleichen Anfangsbedingungen schließlich die allgemeinste Form von  $\varphi(t)$  mit

$$x_j(t) = \frac{(n-1)k_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n k_i}{2n} t^2 + x_{j0} \quad (j = 1, \dots, n).$$

#### 5.4 Interpretation der in 5.2 und 5.3 gewonnenen Bewegungsgleichungen

##### 5.4.1 Allgemeines

Die in 5.2 und 5.3 abgeleiteten Ergebnisse gleichen sich in ihrer Form; für die nun folgenden Überlegungen kann dementsprechend der Zusammenhang zwischen Ort und Zeit, über den die Bewegungsgleichungen Auskunft geben, verallgemeinert wie folgt charakterisiert werden:

$$*) \quad \varphi(t) = t^2 \alpha + b$$

$\varphi$ ,  $\alpha$  und  $b$  nehmen dabei die Dimension des jeweils betrachteten Falls an.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß der obige Ausdruck für  $\varphi(t)$  im gewählten Vektorraum stets einen eindimensionalen Unterraum, d.h. eine Gerade darstellt. Zunächst wird dazu die Parametertransformation  $t^2 = t'$  vorgenommen, so daß man aus \*) erhält:

$$\tilde{\varphi}(t') = t' \cdot \alpha + b$$

In dieser Form geschrieben erkennt man, daß dies die Gleichung eines eindimensionalen Unterraums ist; es

handelt sich also um eine Gerade in Parameterdarstellung.

Aus den soeben angestellten Überlegungen ist daher zu schließen, daß es sich bei der Bewegung des Konzentrationspunktes auf der Konzentrationsebene unter dem Einfluß des Vektors  $\vec{k}$  (wobei die Komponenten  $k_j$  Konstante sind) um eine geradlinige Bewegung handelt. Die Gleichung  $^{*)}$  gibt auch Auskunft darüber, wie sich die auf der Geraden zurückgelegten Strecken zu den dazu notwendigen Zeiten verhalten. Man entnimmt aus  $^{*)}$ , daß eine quadratische Abhängigkeit besteht. Das bedeutet anschaulich, daß sich der Konzentrationspunkt immer schneller bewegt, je mehr sich der betrachtete Zeitpunkt  $t$  vom festgesetzten Ausgangszeitpunkt  $t = 0$  entfernt.<sup>1)</sup>

Im folgenden Abschnitt soll zunächst noch davon abgesehen werden, den gefundenen Bewegungsablauf mit der Realität zu vergleichen; dagegen muß formal noch untersucht werden, ob die gefundenen Bewegungsgleichungen, die, vom mathematischen Standpunkt aus gesehen für  $0 < t < \infty$  das gegebene Differentialgleichungssystem erfüllen, für dieses Intervall auch den bezüglich der  $x_j$  zu betrachtenden Bedingungen genügen.

---

<sup>1)</sup> Es handelt sich also um eine Bewegung, die analog zum "freien Fall" in der Physik verläuft.

#### 5.4.2 Abgrenzung des Zeitintervalls für den dreidimensionalen Fall

Der Anschaulichkeit der Darstellung wegen soll die soeben angeschnittene Frage zunächst wieder für  $n = 3$  Merkmalsträger, also für den dreidimensionalen Fall durchdacht werden.

Die in 5.2 abgeleitete Vektorfunktion stellt eine Gerade  $g$  dar, die ganz in der entsprechenden Konzentrationsfläche ( $\sum x_j = 1$ ) liegt. Unter dem Einfluß des angenommenen Kraftfeldes bewegt sich der Konzentrationspunkt  $P$  vom Ort  $\mathcal{P}^0$  weg, in einer bestimmten Richtung auf der Geraden  $g$ , und zwar erfolgt die Bewegung wegen der quadratischen Abhängigkeit in  $t$  gleichförmig beschleunigt. Gleich wie  $g$  im Einzelfall liegt, wird sich der Punkt  $P$  nach einer bestimmten Zeit  $t_e$  in einem der drei folgenden Punkte der Geraden befinden.

- 1. Schnittpunkt von  $g$  mit der Ebene  $x_1 = 0$
- oder 2. Schnittpunkt von  $g$  mit der Ebene  $x_2 = 0$
- oder 3. Schnittpunkt von  $g$  mit der Ebene  $x_3 = 0$ .

Die Bedeutung der Schnittpunkte ergibt sich daraus, daß der Anteil  $\frac{a_{ij}}{A_i}$  für einen der drei Merkmalsträger auf Null abgesunken ist.

Würde man in die Betrachtung einführen, daß sich der Konzentrationspunkt weiter in gleicher Richtung

bewegen kann, d.h. würde man die Bedingung  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) aufgeben, so würde das die Zulassung negativer Anteilswerte  $\frac{a_j}{A}$  bedeuten, was aber für

die gegenwärtige Betrachtung nicht sinnvoll ist. Die in 5.2 gewonnenen Gleichungen für  $\varphi_n(t)$  haben demgemäß nur Bedeutung für das Zeitintervall  $0 \leq t \leq t_e$ .

#### 5.4.3 Reduzierung der Merkmalsträger nach der

Zeit  $t_e$

Man kann die obigen Betrachtungen über die Bahn von P über den Zeitpunkt  $t_e$  hinaus fortsetzen, wenn man berücksichtigt, daß der Konzentrationspunkt die Dreiecksfläche, die durch  $X_1(1,0,0)$ ,  $X_2(0,1,0)$  und  $X_3(0,0,1)$  aufgespannt wird, nicht verlassen darf. Um dieser Bedingung zu genügen, muß jenem Merkmals-träger, dessen Anteil  $\frac{a_j}{A}$  zum Zeitpunkt  $t_e$  den

Wert Null annimmt, für die Zeit  $t > t_e$  der Anteil  $\frac{a_j}{A} = 0$  am Gesamtmerkmalsbetrag zugeordnet werden; sein Verhalten soll, zumindest für eine gewisse Zeit  $t'$  so sein, daß ihm als "Kraft"  $k_j = 0$  zugeordnet werden kann; in bezug auf den Gesamtmerkmalsbetrag interpretiert, bedeutet diese Annahme, daß der Merkmalsträger j, dessen Anteil  $\frac{a_j}{A}$  auf Null gesunken ist, zunächst einmal, zumindest für eine Zeit  $t'$  als Mitbewerber um Anteile am Gesamtmerkmalsbetrag ausscheidet.

Unter dieser Annahme reduziert sich die Dimension des betrachteten Raums, in dem sich der Konzentrationspunkt bewegt. Für die gegenwärtigen Ausführungen bedeutet das, daß die Bahn des Konzentrationspunktes auf der Schnittgeraden der Ebene  $x_1+x_2+x_3 = 1$  und der Ebene  $x_k = 0$  ( $k \in \{1,2,3\}$ ) verläuft. Wie sich der Konzentrationspunkt auf dieser Schnittgeraden bewegt, kann mit Hilfe der Differentialgleichungen, die für den zweidimensionalen Fall - also bei nur zwei Merkmalsträgern - gewonnen werden.

Bei einer Betrachtung des Problems für eine Menge von  $n$  Merkmalsträgern könnte, unter der Annahme, daß die Komponenten des Vektors  $\vec{k}$  Konstante sind, die Reduzierung der Dimensionen von  $n$  auf  $n-1$ ,  $n-2$ , ...,  $n-(n-1)$  im Zeitablauf verfolgt werden: man kann den Weg des Merkmalsträgers, dem gemäß seinem Verhalten der größte Betrag  $k_j$  zuzuordnen ist, verfolgen bis er als einziger übriggeblieben ist und den Merkmalsbetrag  $\frac{a_j}{A} = 1$ , d.h. aber  $a_j = A$ , und somit den

Gesamtmerkmalsbetrag für sich allein hält. Eine derartige Entwicklung beruht aber allein auf der Voraussetzung von Konstanten als Komponenten des Vektors  $\vec{k}$ .

### 5.5 Ein Versuch zur mathematischen Erfassung von weiteren Einflüssen auf die Bewegung des Kon- zentrationpunktes.

In der Realität ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, wie sie hier als für die Bewegung des Konzentrationpunktes gültig ermittelt wurde, selten oder nie, bzw. nur unter besonderen Bedingungen anzutreffen. Ebenso wie in Wirklichkeit der ideale "freie Fall" der Physik nur unter besonderen Versuchsbedingungen auftritt, sonst jedoch durch Widerstände verschiedenster Art (Luft, Flüssigkeiten und dergleichen) gehemmt wird, muß das Auftreten ähnlicher Widerstände für die hier zur Diskussion stehende Problemstellung in Betracht gezogen und deren Wirkung erörtert werden.

Da im weiteren von geradlinigen Bahnkurven des Konzentrationpunktes, wie sie durch die bisherigen Erörterungen gezeigt wurden, ausgegangen werden soll,<sup>1)</sup> kann man sich, ohne Beschränkung der Allgemeinheit bei der mathematischen Behandlung des Problems auf den zweidimensionalen Fall beschränken; ein derartiges Vorgehen vereinfacht die Darstellung; die gewonnenen Ergebnisse können wie schon vorher in einfacher Weise auf eine n-dimensionale Betrachtung übertragen werden. Da man die Gerade  $g$ , auf der sich der Konzentrationpunkt bewegt, ebenso kennt wie

---

<sup>1)</sup> Der stark vereinfachte Ansatz des Vektors  $\vec{k}$  bleibt also vorerst unverändert. Auf Modifizierungen wird in 5.6 eingegangen.

den Ortsvektor  $\vec{r}^0$  zum Zeitpunkt  $t_0$ , genügt zur Beschreibung der Lage des Konzentrationspunktes ein Parameter, der im folgenden mit  $\sigma$  bezeichnet werden soll.

Ausgehend vom Ortsvektor  $\vec{r}^0$  kann man mit Hilfe des Richtungsvektors  $\vec{u}_0$  in Richtung der zu erwartenden Bewegung auf der Geraden den Ort des Konzentrationspunktes zum Zeitpunkt  $t$  durch

$$\vec{r}(t) = \vec{r}^0 + \sigma(t) \cdot \vec{u}_0$$

beschreiben.

Wie in Abschnitt 5.2.1 erörtert, erweist sich als einzig wirksame vektorielle Größe, von der die Bewegung des Konzentrationspunktes abhängt, die vom Vektor  $\vec{k}$  abgeleitete vektorielle Größe  $\vec{k}_{\text{eff}}$ .

Ohne Betrachtung hemmender Einflüsse würde sich also folgende Darstellung ergeben:

$$\ddot{\sigma}(t) = \vec{k}_{\text{eff}}$$

(Es ist  $\vec{k}_{\text{eff}} = |\vec{k}_{\text{eff}}|$  ; man vergleiche die vektorielle Darstellung auf Seite 169 ff.

Nun soll versucht werden, wie eingangs zu diesem Kapitel erörtert, hemmende Einflüsse in die Untersuchung einzuführen.

Auch das kann ohne große Schwierigkeiten in bezug auf

Konzentrationserscheinungen interpretiert werden: man denke z.B. daran, daß sich einem Unternehmen, das versucht seinen Marktanteil ständig zu vergrößern, nicht nur die Konkurrenten mit dem gleichen Bestreben entgegentreten, sondern u.U. von einer bestimmten Größe seines Marktanteils an mehr oder weniger quantifizierbare Dinge, wie z.B. wirtschaftsrechtliche Bestimmungen, oder auch die öffentliche Meinung, entgegenstellen und eine weitere Vergrößerung des Marktanteils zumindest behindern.

Für das Weitere soll vorausgesetzt werden, daß derartige hemmende Einflüsse proportional zur Geschwindigkeit des Konzentrationspunktes sind. Erst im Anschluß an die Lösung der in diesem Zusammenhang auftretenden Differentialgleichung soll der nächste Abschnitt dann die Übereinstimmung des Modells mit der Realität diskutieren.

Unter Berücksichtigung einer zur Lageveränderung je Zeiteinheit ("Geschwindigkeit") proportionalen hemmenden Kraft ergibt sich für  $\dot{G}(t)$  folgende Differentialgleichung:

$$(*) \quad \ddot{G}(t) = k_{\text{eff}} - r \dot{G}(t) \quad r = \text{const.}$$

Setzt man zunächst  $\ddot{G}(t) = 0$ , so erhält man die

1. partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung
2. Ordnung unmittelbar<sup>1)</sup>:

---

<sup>1)</sup> vgl. dazu Bronstein, J.N., Semendjajew, K.A., a.a.O. S. 398

$$\sigma_1(t) = \frac{k_{\text{eff}}}{r} \cdot t$$

Als zweite partikuläre Lösung der Differentialgleichung findet man<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_2(t) &= A \cdot \sigma_1(t) \int \frac{e^{-rt}}{\frac{k_{\text{eff}}^2}{r^2} t^2} dt = \\ &= A \cdot \frac{r^2}{k_{\text{eff}}^2} \cdot \sigma_1(t) \int \frac{e^{-rt}}{t^2} dt \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (\*\*) erhält man dann als Linearkombination der zwei partikulären Lösungen zu

$$\sigma(t) = C_1 \sigma_1(t) + C_2 \sigma_2(t)$$

Wenn man nur die erste partikuläre Lösung betrachtet, so sieht man daran, daß sich die im Modell eingeführten hindernden Kräfte so auswirken, daß der Weg, den der Konzentrationspunkt zurücklegt nicht mehr quadratisch von der Zeit abhängt, sondern nur noch linear; die Bewegung also so verläuft, daß sich die Anteile

$\frac{a_i}{A}$  linear abhängig von der Zeit verändern. Man kann

also sagen, der Konzentrationspunkt bewegt sich unter dem Einfluß von hemmenden Kräften mit konstanter Geschwindigkeit.

Dieses Zwischenergebnis scheint zumindest für beschränkte, relativ kurze Zeitintervalle durchaus realen Konzentrationserscheinungen zu entsprechen.

---

<sup>1)</sup> vgl. z.B. Bronstein, Semendjajew a.a.O. S.398

Aus der Integration der zweiten partikulären Lösung erhält man ein ebenfalls recht interessantes Ergebnis bezüglich der Bewegung des Konzentrationspunktes: die Wege, die der Konzentrationspunkt hier zurücklegt sind gemäß einem exponentiellen Gesetz mit der Zeit verknüpft. Für eine Menge von  $n$  Merkmals-trägern läßt sich dieses weitere Zwischenergebnis dahingehend interpretieren, daß die Bewegung des Konzentrationspunktes immer mehr gedämpft wird, und zwar proportional zu der Zeit, die seit  $t = 0$  vergangen ist.

Auch ein derartiger Bewegungsablauf scheint Konzentrationsprozessen in der Realität zu entsprechen: unter dem Einfluß des Verhaltens der Merkmalsträger in  $t_0$  bewegt sich der Konzentrationspunkt im Zeitablauf; wegen der auftretenden hemmenden Kräfte erfolgt aber die Bewegung so, daß gleichen Zeitabschnitten exponentiell abfallende zurückgelegte Distanzen zugeordnet werden müssen; die Anteilswerte  $\frac{a_i}{A}$  verändern sich also immer weniger.

Da sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (\* \*) als Linearkombination der beiden partikulären Lösungen ergibt, kann es als möglich angesehen werden, durch entsprechende Wahl der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  ein Bewegungsgesetz zu finden, das es erlaubt, die Realität hinreichend genau wiederzugeben bzw. genau genug anzunähern.

5.6 Anwendungsmöglichkeiten des hier entwickelten  
Verfahrens zur Bestimmung von  $\varphi(t)$  bei  
realen Konzentrationsprozessen.

Dynamische Konzentrationsmessung im strengen Sinn baut auf der Funktion  $\varphi(t)$  auf, wobei die Zeit als kontinuierliche Größe in die Analyse einbezogen wird. In diesem 5. Kapitel wurde versucht, eine Möglichkeit zu entwickeln, die es erlaubt,  $\varphi(t)$  unmittelbar zu entwickeln. Grundlage dafür war der Ansatz  $k_j = \ddot{x}_j(t)$ <sup>1)</sup>.

Wenn man sich nun Gedanken macht über die Brauchbarkeit der in 5.2 bis 5.5 vorgestellten Wege zur Berechnung von  $\varphi(t)$  für die Analyse realer Konzentrationsprozesse, so muß man berücksichtigen, daß der Ansatz  $k_j = \ddot{x}_j(t)$  bewußt einfach bei geringem Realitätsbezug gewählt war. Setzt man bei grundsätzlicher Beibehaltung dieses Ansatzes  $k_j = k_j(x_j(t))$  an, d.h. also z.B. man nimmt an, daß die Bemühungen eines Unternehmens um seinen Marktanteil von der Verteilung des Gesamtumsatzes auf alle am Markt vertretenen Unternehmen abhängen, so erhält man als Grundlage für  $\varphi(t)$  die Differentialgleichung

$$k_j(x_j(t)) = \ddot{x}_j(t).$$

In Lösungen derartiger Differentialgleichungen treten stets e-Funktionen auf; man würde, abhängig von der Art der Funktion  $k_j(x_j(t))$ , i.a. auf sehr komplizierte

---

<sup>1)</sup> vgl. S. 166

Bewegungsgleichungen  $\varphi(t)$  zur Erklärung von Konzentrationsprozessen geführt, die sich dann als geeigneter zur Beschreibung von Konzentrationsprozessen erweisen, als die hier in aller Ausführlichkeit ermittelten Funktionen  $\varphi(t)$ , die auf sehr einfachen Voraussetzungen aufbauten.

Die entscheidende Aussage dieses 5. Kapitels sollte aber weder in den hier ermittelten Bewegungsgleichungen noch in der Möglichkeit zur Aufstellung entsprechend verfeinerter Funktionen  $\varphi(t)$  bei Verwendung komplizierterer Ansätze bezüglich des Vektors  $\vec{k}$  gesehen werden. Worum es in erster Linie ging, war das Einführen einer neuen Vorgehensweise bei der Analyse von Konzentrationsprozessen. Die in 5.1 gemachten Annahmen sind vielleicht am besten vergleichbar mit einem Axiomensystem, aus dem in den Abschnitten 5.2 bis 5.4 bestimmte Aussagen hergeleitet wurden. Dabei wurde, allgemein formuliert, zunächst die Existenz bestimmter Begriffe, z.B. des Konzentrationspunktes, der Konzentrationsebene und des Vektors  $\vec{k}$  vorausgesetzt. Dann wurden, insbesondere in der zweiten Hälfte von 5.1, bestimmte Eigenschaften und Beziehungen zwischen diesen Begriffen, die - zunächst subjektiven Vorstellungen entsprechend - als grundlegend erscheinen, in idealistischer Form zusammengestellt, z.B. der Vektor  $\vec{k}$  enthalte als Komponenten nur konstante Größen  $k_j$  für die gelte  $k_j = \ddot{x}_j(t)$ . Damit ist eine mathematische Konstruktion gegeben, die Grundlage war für die Herleitung der Funktion  $\varphi(t)$ . Allerdings ist zu beachten, daß "die Axiome so zu wählen sind, daß die Sätze, die man daraus erhält, mit unserer ...

Anschauung in Einklang stehen. Anderenfalls ist die entsprechende mathematische Konstruktion kein brauchbares mathematisches Modell empirisch beobachteter... Tatsachen." <sup>1)</sup> Die Brauchbarkeit des hier entwickelten Modellansatzes muß sich allerdings noch an Hand ökonomischer Untersuchung realer Konzentrationsprozesse erweisen. Unbeschadet des Ergebnisses dieser Überprüfung sollte in diesem 5. Kapitel der Versuch unternommen werden, einen neuen Weg bei der Analyse von Konzentrationsprozessen zu gehen.

---

<sup>1)</sup> zit. mit Modifikationen nach Kreyszig E., a.a.O., S. 57/58, mit Hinweis auf Hilbert D., Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1956.

Literaturverzeichnis

1. Bücher

- Alexandroff, P. und  
Hopf, H.: Topologie, Springer Verlag  
Berlin, Heidelberg, New York  
1935
- Allen, R.G.D.: Mathematical Economics,  
Macmillan & Co., London, 1965
- Behnke, H.,  
Remmert, R.,  
Steiner, H.-G.,  
Tietz, H. (Hrsg.): Mathematik I, Fischer Lexi-  
kon, Frankfurt a.M., 1964
- Grotemeyer, K.P.: Analytische Geometrie,  
Sammlung Götschen Band 65/65a,  
Verlag Walter de Gruyter & Co.,  
Berlin 1962
- Heinen, E.: Das Zielsystem der Unterneh-  
mung - Grundlagen betriebs-  
wirtschaftlicher Entschei-  
dungen, Betriebswirtschaft-  
licher Verlag Dr. Th. Gabler,  
Wiesbaden, 1966
- Jacobs, K. (Hrsg.): Selecta Mathematica III,  
Heidelberger Taschenbücher,  
Band 86, Springer Verlag,  
Berlin, Heidelberg, New York  
1971
- Kaplan, A.D.H.,  
Dirlam, J.B. und  
Lanzilotti, R.F.: Pricing in Big Business,  
Washington, 1958
- Kellerer, H.: Statistik im modernen Wirt-  
schafts- und Sozialleben,  
Rowohlt Taschenbuch Verlag  
GmbH, Reinbek bei Hamburg,  
1960
- Kreyszig, E.: Statistische Methoden und  
ihre Anwendung, Verlag  
Vandenhoeck und Ruprecht,  
Göttingen 1965

- Rittershausen, H.: Wirtschaft, Fischer Lexikon,  
8. Auflage, Frankfurt a.M.,  
1966
- Wöhe, G.: Einführung in die Allgemeine  
Betriebswirtschaftslehre,  
6. Auflage, Verlag Franz Vahlen  
GmbH, Berlin und Frankfurt a.M.,  
1964

## 2. Aufsätze in Zeitschriften und Zeitungen:

- Bruckmann, G.: Einige Bemerkungen zur statisti-  
schen Messung der Konzentration,  
in: Metrika, 1969, Heft 14,  
S. 184-213
- Grossack, J.M.: Towards an Integration of  
Static and Dynamic Measures  
of Industry Concentration,  
in: Review of Economics and  
Statistics, 47, 1965, S. 301-308
- Hart, P.E. und  
Prais, S.J.: The Analysis of Business Con-  
centration: A Statistical  
Approach, in: Journal of the  
Royal Statistical Society,  
Series A, 119, 1956, S. 150-180
- H.M.(Südd.Ztg.): Fusionskarussell im Lebens-  
mittelhandel, in: Südd. Zei-  
tung, Nr. 134, 5./6. Juni 1971,  
S. 25/26
- Kellerer, H. und  
Schaich, E.: Statistische Probleme der Er-  
fassung von Konzentrations-  
phänomenen, Sonderdruck aus:  
Die Konzentration in der Wirt-  
schaft; herausgegeben von  
H. Arndt, 2. Auflage, Verlag  
Duncker & Humblot, Berlin 1971,  
S. 41-74
- Münzner, H.: Probleme der Konzentrations-  
messung, in: Allg.Stat.Archiv,  
47, 1963, S. 1-9

Schaich, E.:

Lorenzkurve und Gini-Koeffizient in kritischer Betrachtung, in: Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik, Band 185, Heft 3 (1971), S. 193-208;

Taguchi, T.:

Concentration Curve Methods and Structures of Skew Populations - a Methodology for the Analysis of Economic Data, in: Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 20, 1968, S. 107 - 141

### 3. Formelsammlung:

Bronstein, J.N. und  
Semendjajew, K.A.:

Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen, 7. Auflage, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1966

## Lebenslauf

Wilfried S t u d e n y , geb. 25.3.1945 in  
Planegg/Mchn.

Besuch der Volksschule Planegg/Mchn. vom September 1951  
bis Juli 1955

Besuch des Kurt-Huber-Gymnasiums (neusprachliches  
Gymnasium) in Gräfelfing/Mchn. ab September 1955

Abitur Juni/Juli 1964

Studium der Architektur an der Fakultät für Bauwesen  
der Technischen Hochschule München im Wintersemester  
1964/65

Studium der Betriebswirtschaftslehre an der  
Staatswirtschaftlichen Fakultät der Universität  
München vom Sommersemester 1965 bis Wintersemester  
1968/69

Diplomarbeit nach dem 6. Fachsemester zum Thema:  
"Zur Anwendung des Lorenz'schen Konzentrations-  
maßes auf einige Typen stetiger Verteilungen".

Diplomprüfung im März/Juni 1969

Berufliche Tätigkeit:

2 1/2 Jahre Fa. Siemens AG, München, Zentraleb-  
teilung Betriebswirtschaft

Seit 1.4.1972 Fa. Osram GmbH, München, Auslands-  
abteilung.













